

# الهندسة المدنية

## الجزء الأول

في

الهندسة الفراغية و الهندسة الوصفية

تأليف

المهندس

توفيق قسطنطيني

الحاصل على دبلوم في الهندسة المدنية والمدرس المساعد بمدرسة الهندسة سابقا  
ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية حالا

و

المهندس

كامل المصطفي

الحاصل على دبلوم في الهندسة  
ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية

جميع الحقوق محفوظة للمؤلفين

سنة ١٣٤٧ هـ — ١٩٢٨ م

المطبعة الحديثة بشارع خيرت بالقاهرة









# الهندسة المدنية

## الجزء الأول

في

الهندسة الفراغية ٦ الهندسة الوصفية

### مؤلف

المهندس

#### توفيق قسطنطيني

الحاصل على دبلوم في الهندسة المدنية والمدرس المساعد بمدرسة الهندسة سابقا  
ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية حالا

٦

المهندس

#### كامل المصطفي

الحاصل على دبلوم في الهندسة  
ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية

جميع الحقوق محفوظة للمؤلفين

سنة ١٣٤٧ هـ — ١٩٢٨ م

---

المطبعة الحديثة شارع خيرت بالقاهرة



## المقدمة

لما بدأت تدريس مادة الهندسة الوصفية بمدرسة الفنون والصناعات الملكية شعرت بحاجة الطلبة الى مذكرات مطبوعة في هذه المادة وفعلا طبعت لهم المذكرات اللازمة سنة ١٩٢٦ واخيرا فكرت مع زميلي حضرة كامل المصرى افندى في وضع هذه المذكرات على شكل كتاب لعدم وجود كتب حديثة في هذه المادة باللغة العربية .

وتسهيلا لدراسة هذه المادة للطلبة اللذين لم يدرسوا الهندسة الفراغية من قبل بدأنا الكتاب بالنظريات اللازمة في الهندسة الفراغية وعيننا بوضع حل كثير من التمرينات في لوح يستعين بها الطالب في بدء دراسته

وعنيت بالتوسع في باب الانفرادات على شكل خاص حتى يستعين بها طلبة المدارس الصناعية وخصوصا قسم السمكرة منها

ولقد كان لمعونة حضرة المهندس كامل المصرى افندى في وضع الابواب السبعة الاولى اكبر معضد لى واسفت كثيرا لنقله لمدرسة شبين السكوم الزراعية لان ذلك حرمنى من تعميده الثمين في تجهيز باقى ابواب الكتاب مـ

توفيق قسطنرى





# الفهرست

## الهندسة الفراغية

صفحة

### الفصل الاول

الخط المستقيم وبه اربعة عشر نظرية ٣

### الفصل الثاني

الاجسام ١٦

تمارين متنوعة على الهندسة الفراغية ٢٣

### الهندسة الوصفية

### الفصل الثالث

مساقط النقط والخطوط ٢٥

تمارين (١) ٤٩

### الفصل الرابع

مساقط الاجسام في ايسر أوضاعها في الفراغ ٥٤

تمارين (٢) ٦٢

### الفصل الخامس

تغيير مستوى المسقط ( المساقط المساعدة ) ٦٥

تمارين (٣) ٧٣

### الفصل السادس

المستويات الفراغية وأوضاعها بالنسبة لمستوي المسقط ٧٦

تمارين (٤) ٩٨

(ب)

	صفحة
الفصل السابع	
الخط المستقيم والمستوى	١٠١
تمريعات (٥)	١٢٢
الفصل الثامن	
دوران المستويات حول أحد اثريها وانطباقها على أحد مستويي المسقط	١٢٦
تمريعات (٦)	١٥٠
تابع الفصل الثامن	
مساقط السطوح المستوية والاجسام في احوال متنوعة	١٥٣
تمريعات (٨)	١٦٠
الفصل التاسع	
قطاعات الاجسام	١٦١
تمريعات (٩)	١٧٢
الفصل العاشر	
الانفرادات	١٧٤
الفصل الحادي عشر	
تقاطع السطوح	١٩٦
ويلى ذلك لوح بها حل تمرينات ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠	







# الفصل الاول

## فى الخط المستقيم والمستوى

١ — تعريف :

الجسم المادى : هو كل ما يشغل حيزا محدودا من الفراغ وله طول وعرض وسمك ومقدار الحيز الذى يشغله الجسم يسمى « حجمه »

السطح : هو الحد الذى يفصل الجسم عما يحيطه من الفراغ وله طول وعرض فقط

الخط : هو ما يحد السطح وله طول فقط

النقطة : هى نهاية الخط أو محل تقاطعه بخط آخر وليس لها عرض ولا سمك

الشكل : يطلق لفظ « شكل » على كل مجموعة من النقاط والخطوط والسطوح

المستوى : هو أبسط السطوح وهو السطح الذى اذا انتخبت فيه نقطتان أيا كانتا واتصلتا بمستقيم كان هذا المستقيم وامتداده واقعين باكملهما فى هذا السطح وعلى ذلك يستنتج انه اذا احتوى اى مستو على نقطتين فانه يحتوى على جميع نقط الخط المستقيم الواصل بين هذين النقطتين وامتداده والمستوى فى الاعتبار الهندسى غير محدود وانما يمثل عادة بشكل محدود وعلى شكل مستطيل

الخط الرأسى : الخط الرأسى فى أى مكان هو الاتجاه الذى يأخذه خيط

الشاغل فى ذلك المكان وكل المستويات التى تحتوى على مثل هذا الخط رأسيه

المستوى الافقى : فى أى مكان هو ما كان موازيا لسطح الماء الراكد عند

ذلك المكان وكل الخطوط المحتوى عليها المستوى الافقى اقيقه

## ٢ — أوضاع المستقيم بالنسبة الى المستوى : يستنتج من تعريف المستوى

ان المستقيم : —

اولا — أما أن يقابل المستوى في نقطتين ويقال انه واقع بهما فيه

ثانيا — واما أن يقابله في نقطة واحدة ويقال انه قطعه

ثالثا — واما ألا يقابله ويقال انه مواز له

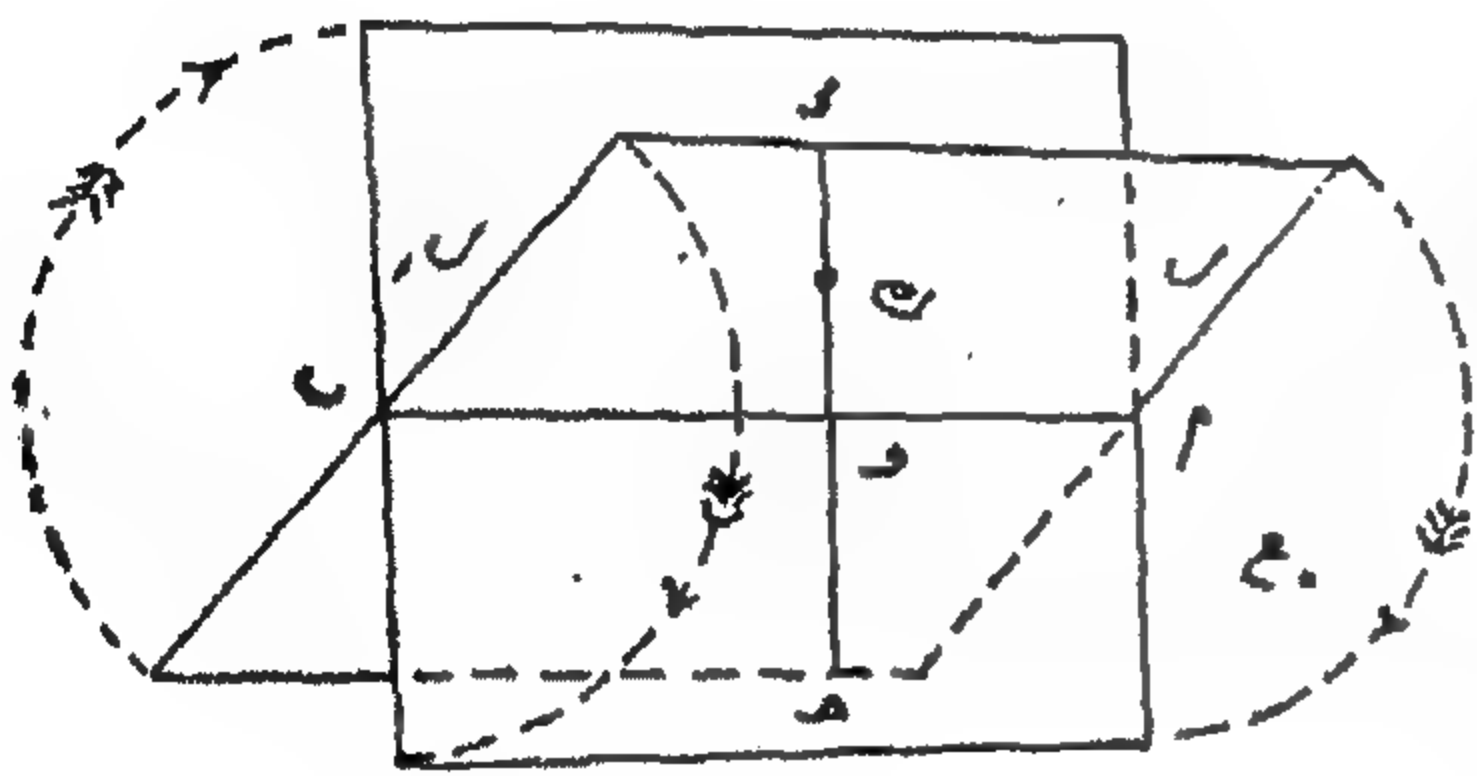
وفي الحالة الثانية أما أن يكون المستقيم عمودا على كل مستقيم يلاقيه في المستوى ويسمى المستقيم عمودا على المستوى أو المستوى عمودا عليه وأما ألا يكون المستقيم عمودا على كل مستقيم يلاقيه في المستوى ويسمى مائلا عليه

ملاحظة : في الهندسة المستوية يدور البحث عن أشكال في مستو واحد .

أما اذا كان الكلام على الأشكال في مستويات مختلفة في الفراغ فيدخل هذا البحث في الهندسة الفراغية

النظرية الاولى : كل مستقيمين متقاطعين يقعان في مستو واحد ولا

يوجدان في سواه



شكل (١)

المفروض : المستقيمان

المتقاطعان ا ب و ج و د في نقطة

وكما في شكل (١)

العمل : خذ أى نقطة

مثل ك على المستقيم ج د وافرض

أن المستوى ل الذى يحتوى على المستقيم ا ب قد دار حول المستقيم ا ب كمحور حتى قابل النقطة ك واخذ الوضع ل

البرهان : النقطتان ك و د في المستوى ل فيكون المستقيم ج د و ك د المحتوى

عليهما واقعا بهما في ذلك المستوى

واذا فرضت بعد ذلك أية نقطة خارجة عن المستوى ل مثل النقطة ع



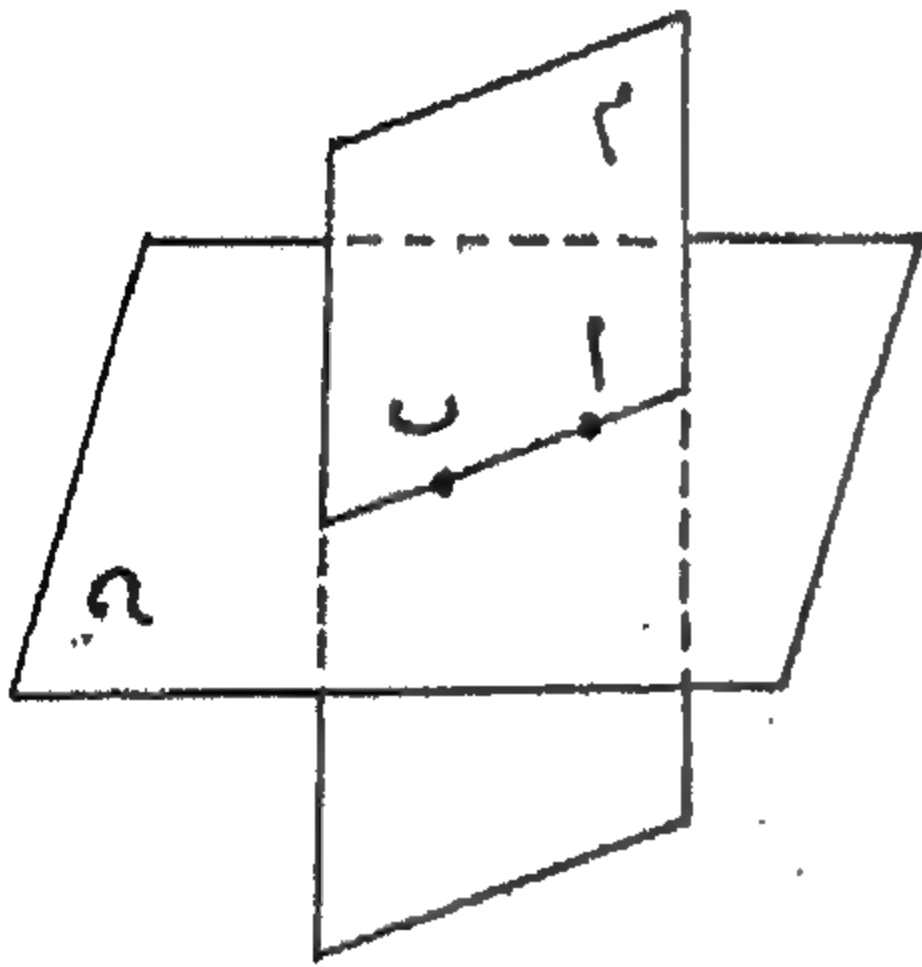
فلكى يحتوى  $\alpha$  على النقطة الجديدة  $\epsilon$  لا بد من استمرار دورانه حول  $\alpha$  وبذلك يبعد عن النقطة  $\epsilon$  فلا يمكن احتوائه عليها ولا على المستقيم  $\epsilon\delta$  .  
 . لا بد أن يكون هناك وضع واحد مثل الوضع  $\alpha$  لهذا المستوى لىكى يحتوى على الخطين  $\alpha\beta$  و  $\alpha\gamma$  وهما المطلوب

نتيجة : يستنتج من النظرية السابقة أن المستوى إنما يتعين بأحدى الاحوال الآتية

- اولا — اما بمستقيمين متقاطعين
- ثانيا — اما بمستقيم ونقطة خارجة عنه
- ثالثا — اما بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
- رابعا — اما بمستقيمين متوازيين

النظرية الثانية : اذا قطع مستوى مستويا آخر فانهما يتقاطعان فى خط مستقيم

المفروضه : المستويان المتقاطعان  $\alpha$  و  $\beta$  ( شكل ٢ )



العمل : لتكن نقطة  $\alpha$  هي نقطة مشتركة بين المستويين  $\alpha$  و  $\beta$  ونقطة  $\beta$  هي اى نقطة أخرى مشتركة بينهما أيضا فاذا وصلنا النقطتين  $\alpha$  و  $\beta$  بخط مستقيم يقع هذا الخط وامتداده بهما فى كل من المستويين  $\alpha$  و  $\beta$

. المستقيم  $\alpha\beta$  مشترك بين المستويين أو بمعنى

آخر هو خط تقاطعهما ولا يمكن اشتراكهما معا فى خط منحنى أو منكسر لانه اذا احتوى أحدهما على ذلك الخط المنحنى أو المنكسر لا يمكن احتواء الآخر عليه بسبب الاستواء وهو المطلوب

نتيجة ١ : يتقاطع الثلاث مستويات معا فى نقطة واحدة لأن كل اثنين منها

يتقاطعان في خط مستقيم وان الثلاث خطوط التي تنشأ من تقاطع كل مع الآخر على التوالي لا يمكن تقابلها في أكثر من نقطة واحدة الا اذا انطبقت على بعضها

وهناك حالة خاصة يتقاطع فيها كل اثنين من الثلاث مستويات في خط مستقيم وعندئذ يتقاطع الثلاث مستويات في ثلاث خطوط مستقيمة متوازية

نتيجة ٢ : أن المستويين : —

أولاً — اما ألا يشتركا في نقطة ما ويقال أنهما متوازيان

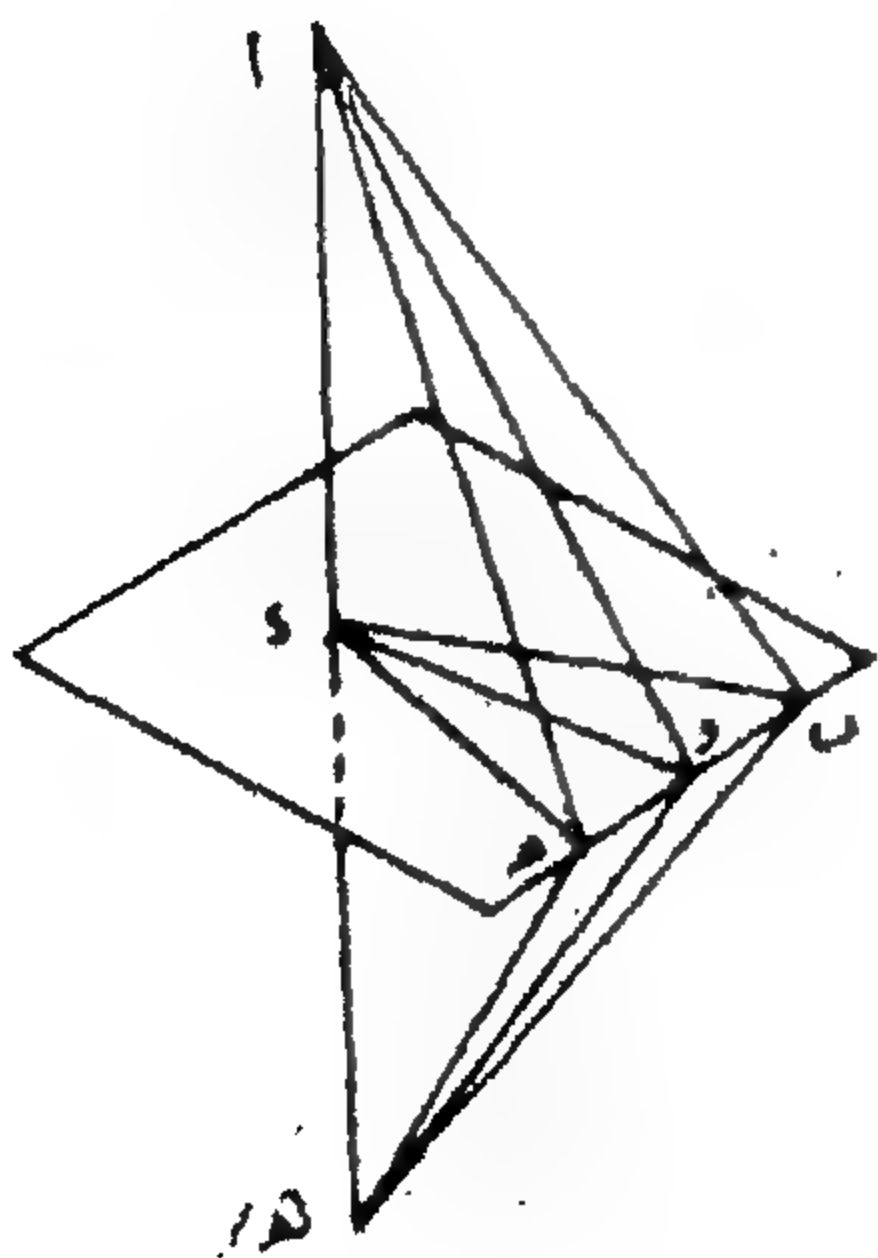
ثانياً — واما أن يشتركا في نقطتين ويقال أنهما متقاطعان

ثالثاً — واما أن يشتركا في ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة ويقال أنهما منطبقان

النظرية الثالثة : اذا تعامد خط مستقيم على كل من مستقيمين متقاطعين في نقطة تقاطعهما كان عمودا على مستوييهما

المفروضه : المستقيم  $a$  المتعامد على كل من المستقيمين  $b$  و  $c$  و  $d$  عند نقطة تقاطعهما و

المطلوب اثباته : أن  $a$  و عمود على المستوى  $b$  و  $c$  ( شكل ٣ )



شكل (٣)

العمل : مد  $a$  و على استقامته الى  $h$  بحيث

يكون  $a \perp h$  ثم خذ نقطة مثل  $o$  على المستقيم

الواصل من  $b$  الى  $h$  ثم وصل من  $b$  و  $c$  و  $o$  الى  $d$

البرهان : حيث أن تقطى  $o$  و  $d$  في المستوى

$b$  و  $c$  يكون الخط  $o$  و  $d$  في المستوى  $b$  و  $c$

وفي المثلثين  $o$  و  $d$  و  $h$  و  $b$

$a \perp h$  و  $h$  بالعمل  $o$  و  $b$  و مشترك

$o$  الزاوية  $a$  و  $b$  و  $c$  بالقيام

$$\therefore \angle = \angle = \angle$$

وبالمثل في المثلثين  $\angle = \angle$  و  $\angle = \angle$  يكون  $\angle = \angle$

$\therefore \triangle = \triangle = \triangle$  و  $\angle = \angle$  لان كل ضلع منهما يساوي نظيره في الآخر  
فاذا دار المثلث  $\angle$  حول القاعدة المشتركة  $\angle$  حتى انطبقت نقطة الرأس  $\angle$   
على نظيرتها  $\angle$  وكذلك انطبق الضلع  $\angle$  و  $\angle$  على نظيره  $\angle$  او يكون : —

$$\therefore \triangle = \triangle = \triangle$$

$$\angle \text{ الزاوية } \angle = \angle = \angle$$

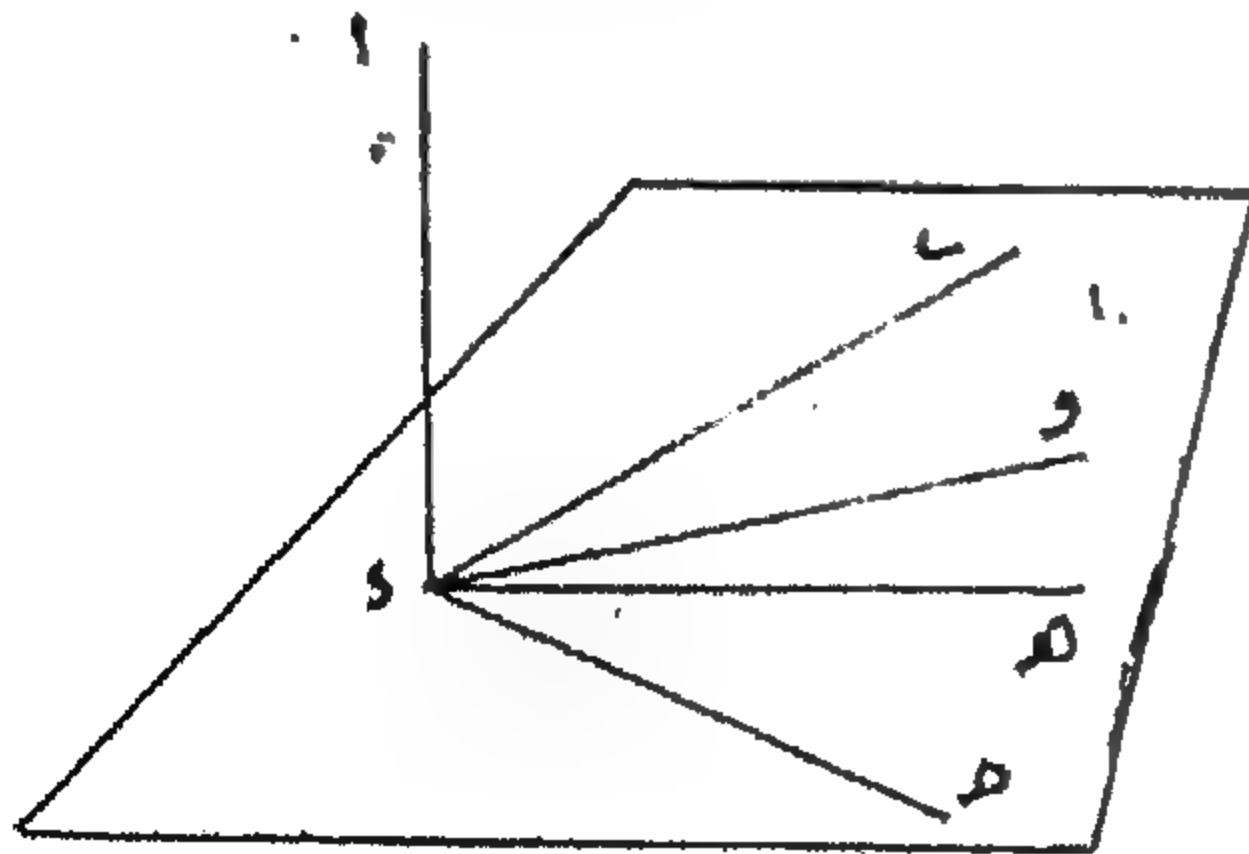
$$\therefore \angle \text{ عمود على } \angle$$

وبالمثل يمكن البرهنة على ان  $\angle$  عمود على اى مستقيم مثل  $\angle$  و في المستوى  
 $\angle$  وهو المطلوب

النظرية الرابعة : اذا تعامد مستقيم على كل من ثلاث مستقيمت متقاطعة في نقطة  
واحدة عند نقطة تقاطعها كانت الثلاث مستقيمت في مستوى واحد

المفروض — المستقيم  $\angle$  عمود على كل من الثلاث مستقيمت  $\angle$  و  $\angle$  و  $\angle$   
عند نقطة تلاقيها  $\angle$  وان المستوى  $\angle$  و  $\angle$  يقطع المستوى  $\angle$  و  $\angle$  في خط مستقيم مثل  
 $\angle$  (شكل ٤)

البرهان : بما ان الخط  $\angle$  عمود على كل من  $\angle$  و  $\angle$  فيكون عمودا على  $\angle$



شكل (٤)

لانه واقع في كل من المستويين  $\angle$  و  $\angle$  و  $\angle$   
 $\therefore$  الزاوية  $\angle$  و  $\angle$  قائمة وتساوي

الزاوية  $\angle$  و  $\angle$

ولكن هذا مستحيل إلا اذا كان

$\angle$  و  $\angle$  منطبقان

$\therefore \angle$  و  $\angle$  واقع في المستوى  $\angle$  و  $\angle$

وهو المطلوب



نتيجة :

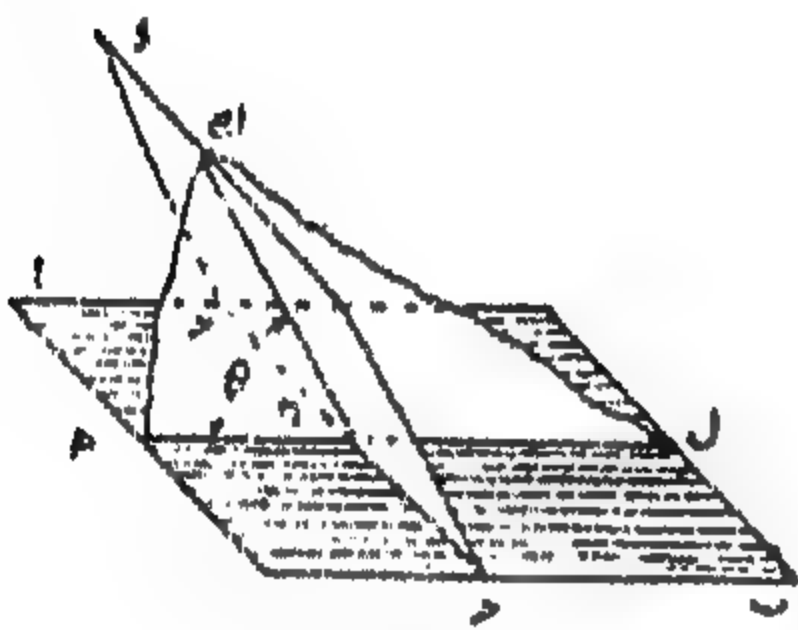
أولا - اذا تعامد مستقيم على كل من مستقيمين متقابلين تعامد على كل خط يلاقيه في مستوييهما

ثانيا - ان كل مجموعة من المستقيمت المتعامدة على مستقيم واحد في نقطة واحدة تسكون في مستوي واحد

ثالثا - لا يمكن اقامة الا عمودا واحدا على مستوى معلوم من نقطة معلومة فيه

رابعا - لا يمكن انزال الا عمودا واحدا على مستوى معلوم من نقطة معلومة خارجة عنه

٣ - تعريف الزاوية الزوجية : الزاوية الزوجية هي الزاوية بين مستويين



(شكل ٥)

متقاطعين وتقاس بالزاوية الواقعة بين عمودين مقيمين على خط تقاطعهما من أى نقطة فيه بحيث يكون أحد العمودين في مستوي منهما والثاني في المستوي الآخر على التوالي (شكل ٥)

فمن الشكل نرى أن المستويين 'a' و 'b'

متقاطعان وتسكون الزاوية الزوجية بينهما هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين 'a' و 'b' المرسمين من النقطة 'A' على خط التقاطع 'c' وعمودين عليهما في تلك النقطة

٤ - المستويان المتوازيان : المستويان المتوازيان هما المستويان اللذان

لا يمكن تقابلهما مهما امتدا

النظرية الخامسة : كل مستوي يحتوى على خط مستقيم عمود على مستوي آخر

يكون عموديا على ذلك المستوي

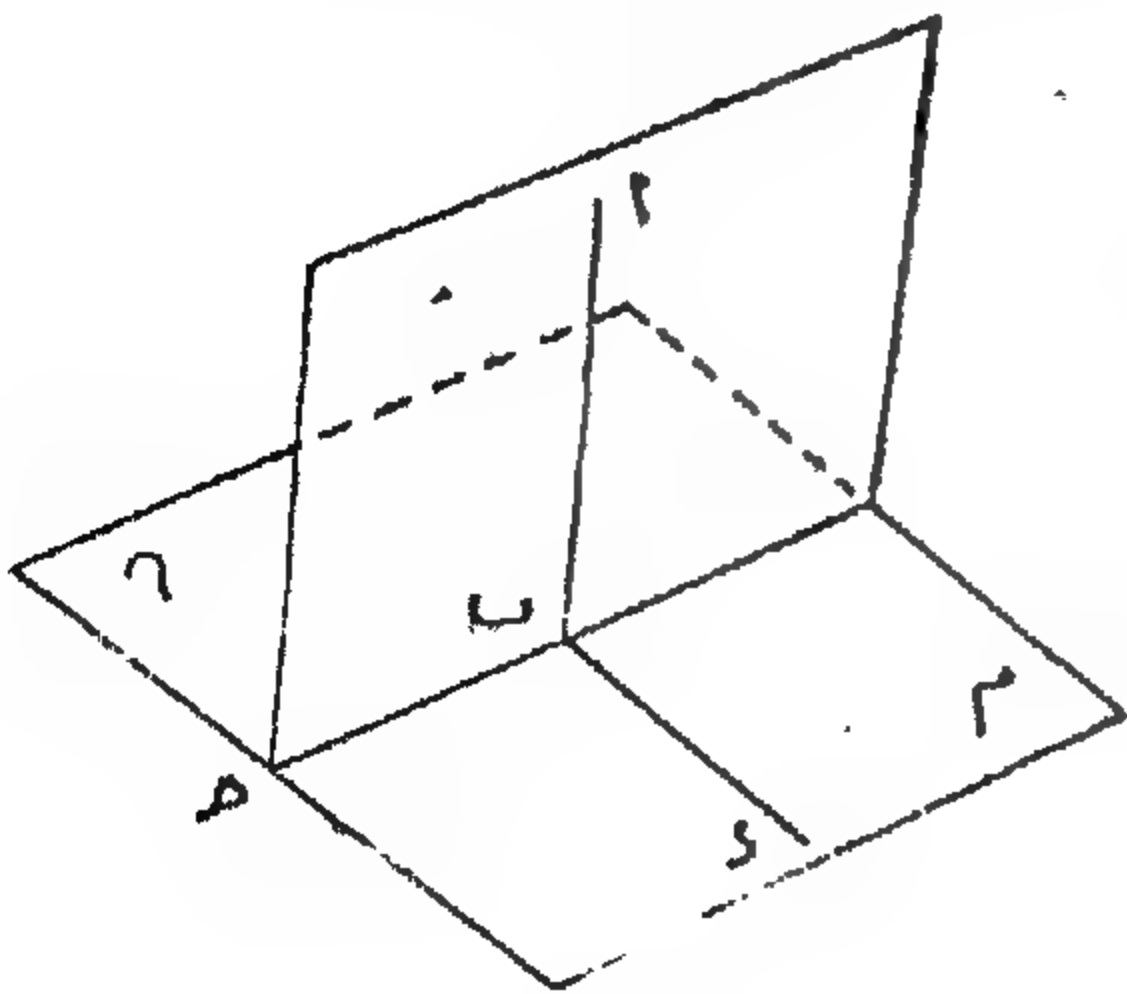
المفروضة : أن المستقيم 'a' عمود

على المستوي 'm' (شكل ٦)

والمطلوب اثباته : ان أى مستوي

مثل 'a' الذي يحتوى على الخط 'a'

يكون عموديا على المستوي 'm'



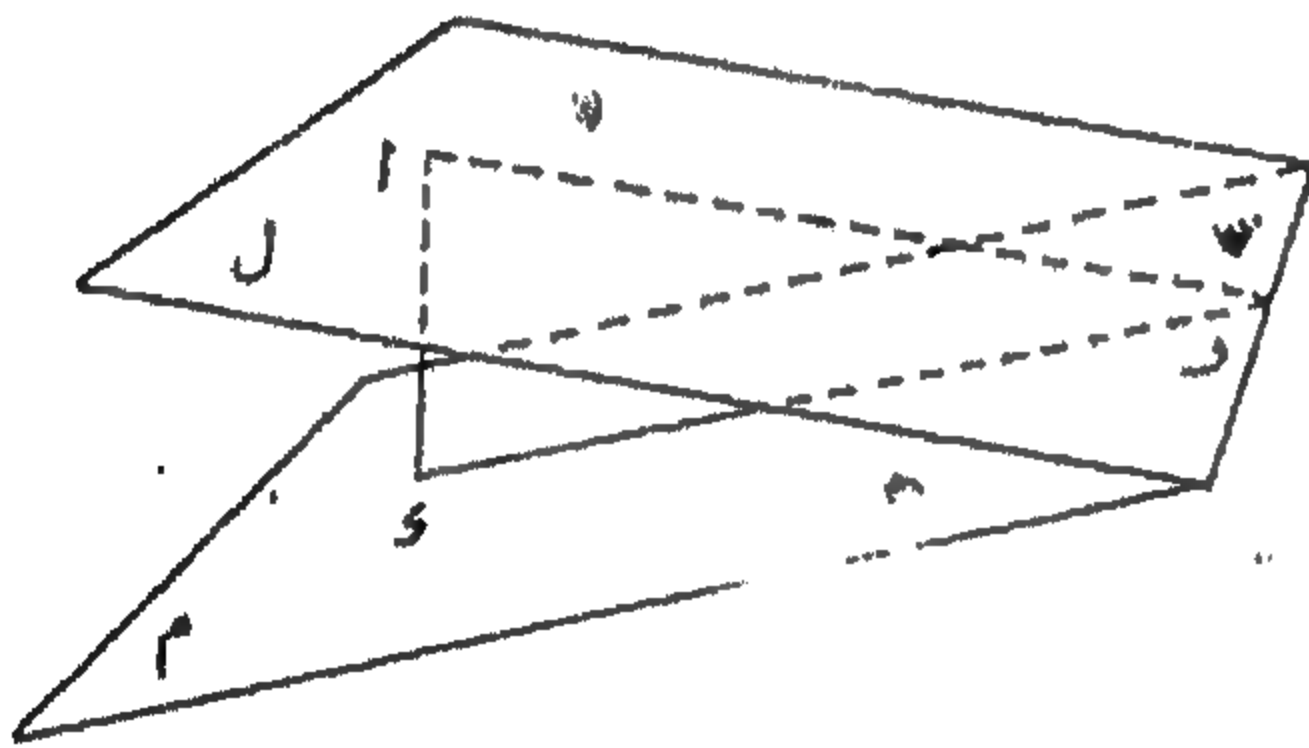
(شكل ٦)

المعمل : نرسم الخط  $ل$  و في المستوى  $م$  عمودا على  $ل$  خط تقاطع المستويين  
 البرهان : بما أن المستقيم  $ل$  عمود على المستوى  $م$  فيكون عمودا على  
 كل من  $ح$  و  $و$  و  $ل$  و لكن الزاوية بين المستويين تقاس بالزاوية  $ل$  و  $ح$   
 تقدم وهي قائمة

∴ المستوى  $ل$  و عمود على المستوى  $م$  وهو المطلوب

نتيجة : إذا تعامد مستويان على بعضهما كان كل مستقيم في أحدهما عمودا على  
 خط تقاطعهما عمودا على المستوى الآخر

النظرية السادسة : المستويات المتعامد عليها مستقيم واحد متوازيه



( شكل ٧ )

المفروضه : المستقيم  $ل$  و  
 عمود على كل من المستويين  $ل$   
 و  $م$  عند النقطتين  $ا$  و  $و$  على التوالي  
 ( شكل ٧ )

المطلوب اثباته : المستويان

$ل$  و  $م$  متوازيان

البرهان . إذا فرض وأمكن امتداد المستويين الى أن يتقابلا فيكون تقاطعهما  
 في خط مستقيم فاذا انتخبت أى نقطة مثل  $و$  على خط تقاطعهما هذا ووصل بينها  
 وبين كل من النقطتين  $ا$  و  $ب$  بالمستقيمين  $وا$  و  $وب$  ولحدث المثلث  $ا و و$  وفيه كل  
 من الزاويتين  $ا$  و  $ب$  و  $ا$  قائمة وهذا مستحيل

∴ لا يمكن تقابل المستويين  $ل$  و  $م$  فيكونان متوازيين وهو المطلوب

نتيجة : إذا تعامد مستويان على بعضهما كان كل مستقيم في أحدهما عمودا على  
 خط تقاطعهما عمودا على الآخر

النظرية السابعة : اذا تعامد مستويان متقاطعان على مستوي ثالث كان خط

تقاطعهما عمودا على المستوى الثالث

المفروضه : المستويان

ا ح و ا ب و المتقاطعان في ا ب

المتعامدان على المستوى م

( شكل ٨ )

المطلوب اثباته : ان خط

تقاطعهما ا ب عمود على المستوى م

البرهان : ليكن ب ح

ب و هما خطا تقاطع كل من

المستويين ا ح و ا ب و بالمستوى م

فالخط المرسوم من ب عمودا على المستوى م لا بد وأن يقع في المستوى

ا ح العمودي على م ( نتيجة النظرية الخامسة )

وكذا لا بد وان يقع في المستوى ا ب للسبب نفسه

∴ ا ب الموجود في كل من المستويين ا ح و ا ب يعني آخر خط تقاطعهما عمود على

المستوى م عند النقطة ب وهو المطلوب

النظرية الثامنة : كل خطين

متعامدين على مستوي واحد متوازيان

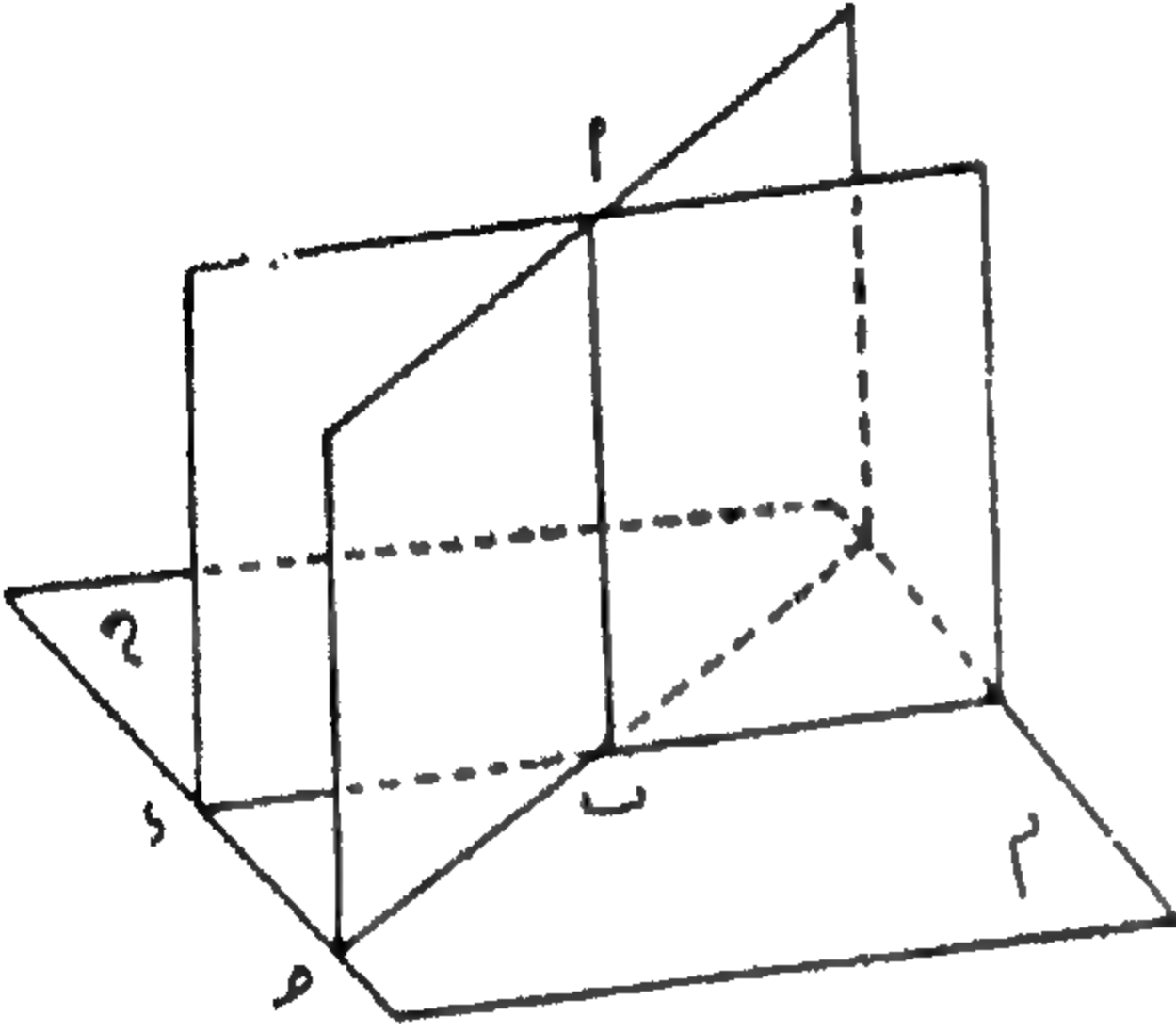
المفروض : كل من المستقيمين

ا ب و ا ح و المتعامدان على المستوى م

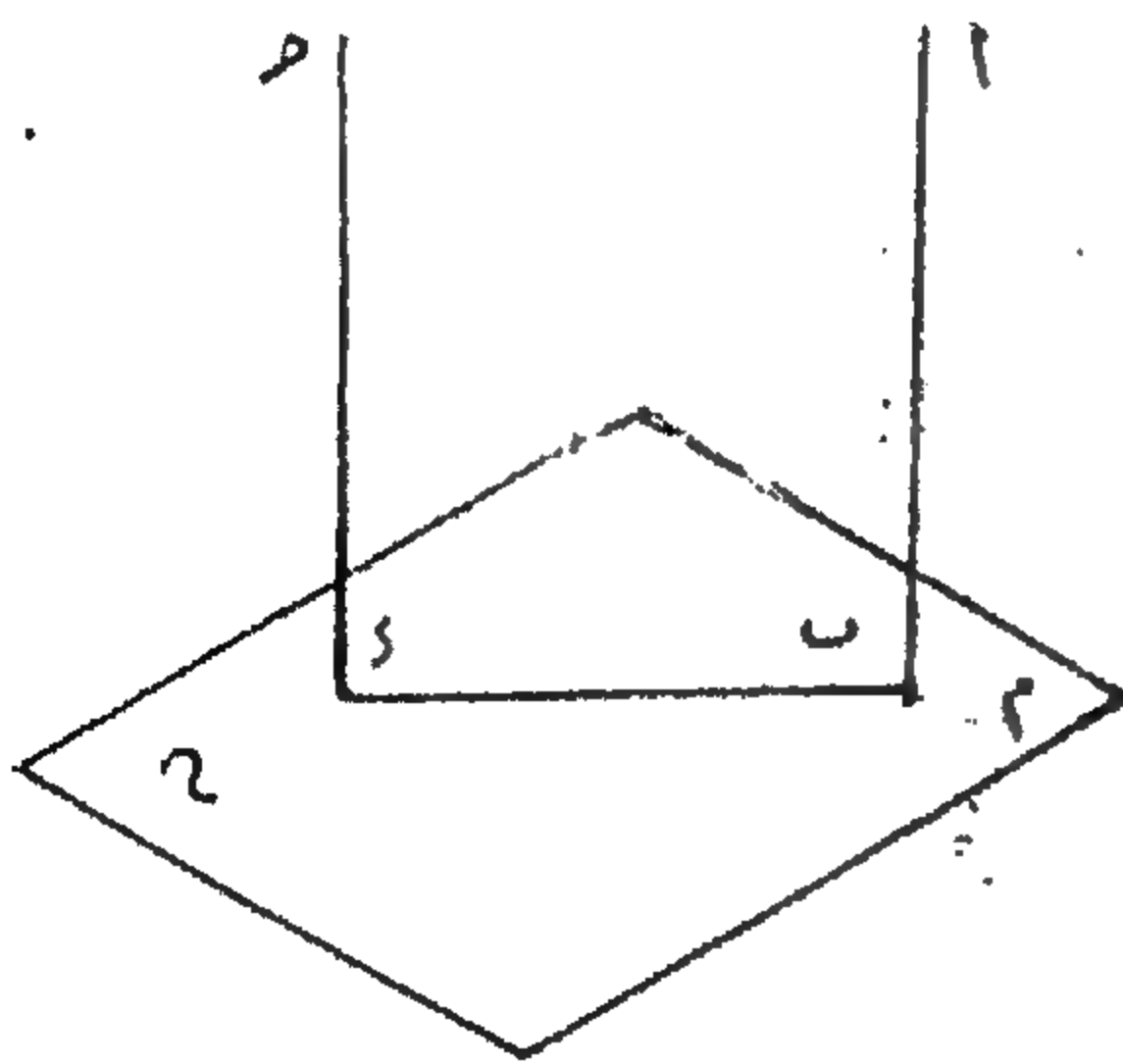
( شكل ٩ )

والمطلوب اثباته : ان المستقيمين

ا ب و ا ح متوازيان



( شكل ٨ )



( شكل ٩ )



البرهان : ليكن  $BC$  تقطى تقاطع الخطين  $AB$  و  $CD$  مع المستوى  $\pi$  على التوالي

فما ان  $AB$  عمود على  $\pi$  يكون المستوى  $AB$  عمودا عليه ايضا (نتيجة النظرية الخامسة) وحيث ان الخط  $CD$  عمود على  $\pi$  في نقطة  $D$  فرضا فيقع  $CD$  في المستوى  $AB$  (نتيجة النظرية الخامسة)

∴ المستقيمان  $AB$  و  $CD$  في مستو واحد

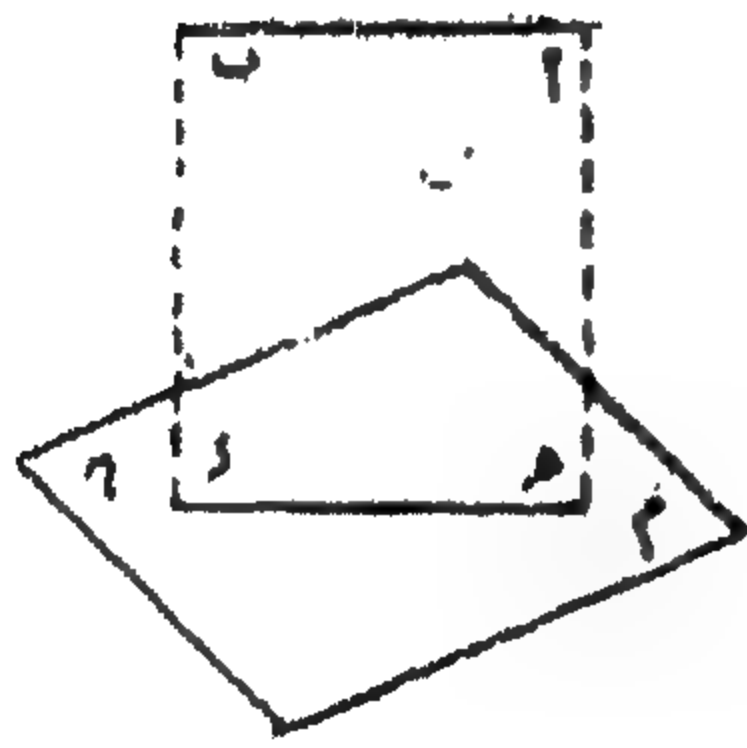
وحيث ان كلا من  $AB$  و  $CD$  في مستو واحد وكل منهما عمود على المستقيم  $BC$  الموجود في مستويهما فيكونان متوازيين وهو المطلوب

النظرية العاشرة : عكس النظرية السابقة صحيح ونترك للطالب البرهنة عليها وهي :  
اذا توازي مستقيمان  $AB$  و  $CD$  كانا عمودا على مستو ما كان المستقيم الآخر عمودا على هذا المستوى

النظرية العاشرة : — اذا توازي مستقيمان فكل مستو يحتوي على احدهما ولا يحتوي على الآخر يكون موازيا له

المفروض : المستقيمان  $AB$  و  $CD$  المتوازيان  
(شكل ١٠) والمستوى  $\pi$  يحتوي على احدهما  
ولا يحتوي على الآخر  $AB$

المطلوب اثباته : ان المستوى  $\pi$  يوازي المستقيم  $AB$



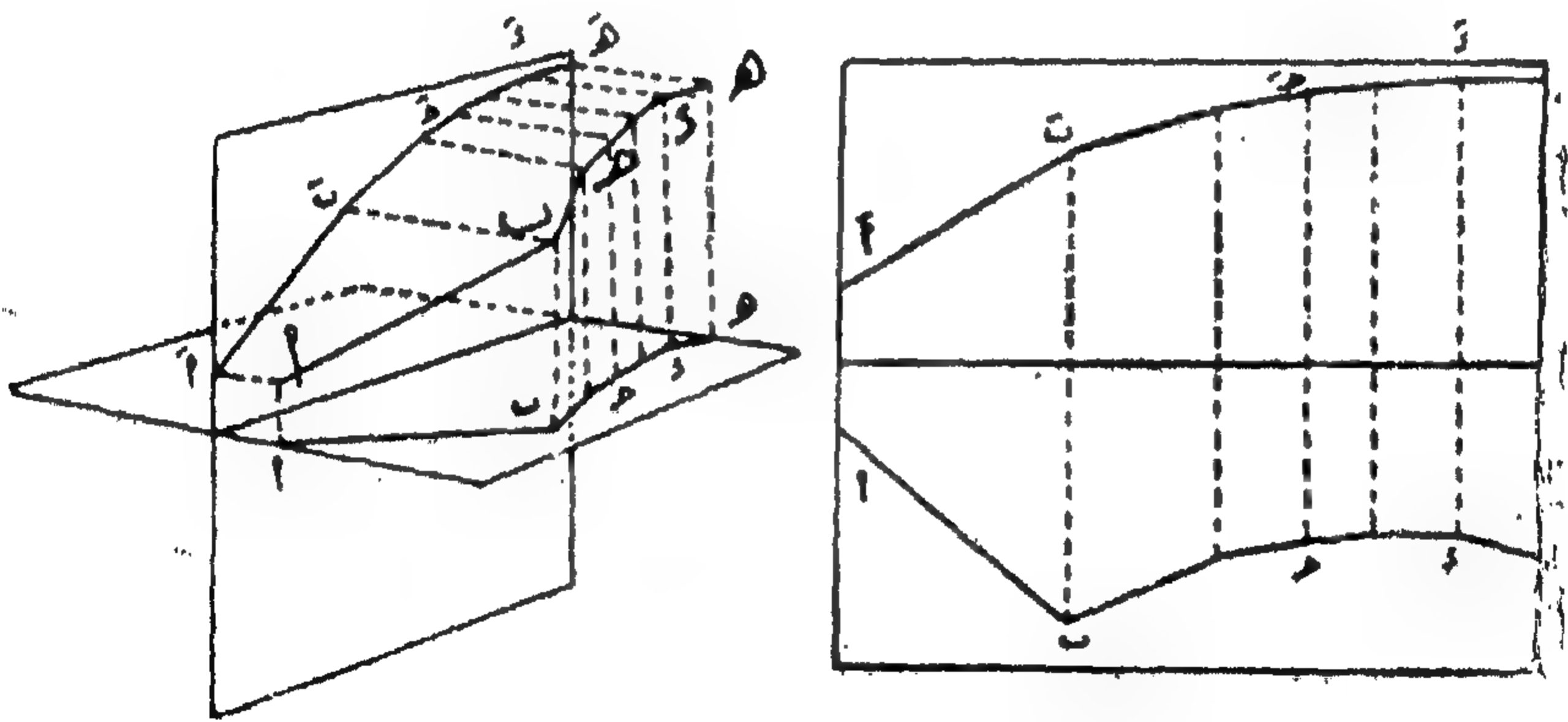
(شكل ١٠)

البرهان : بما أن  $AB$  و  $CD$  متوازيان

فيكونان في مستو واحد فاذا فرض أن المستقيم  $AB$  يقابل  $\pi$  فلا بد وان يقابله عند نقطة من نقط الخط  $CD$  لانه خط تقاطع المستويين

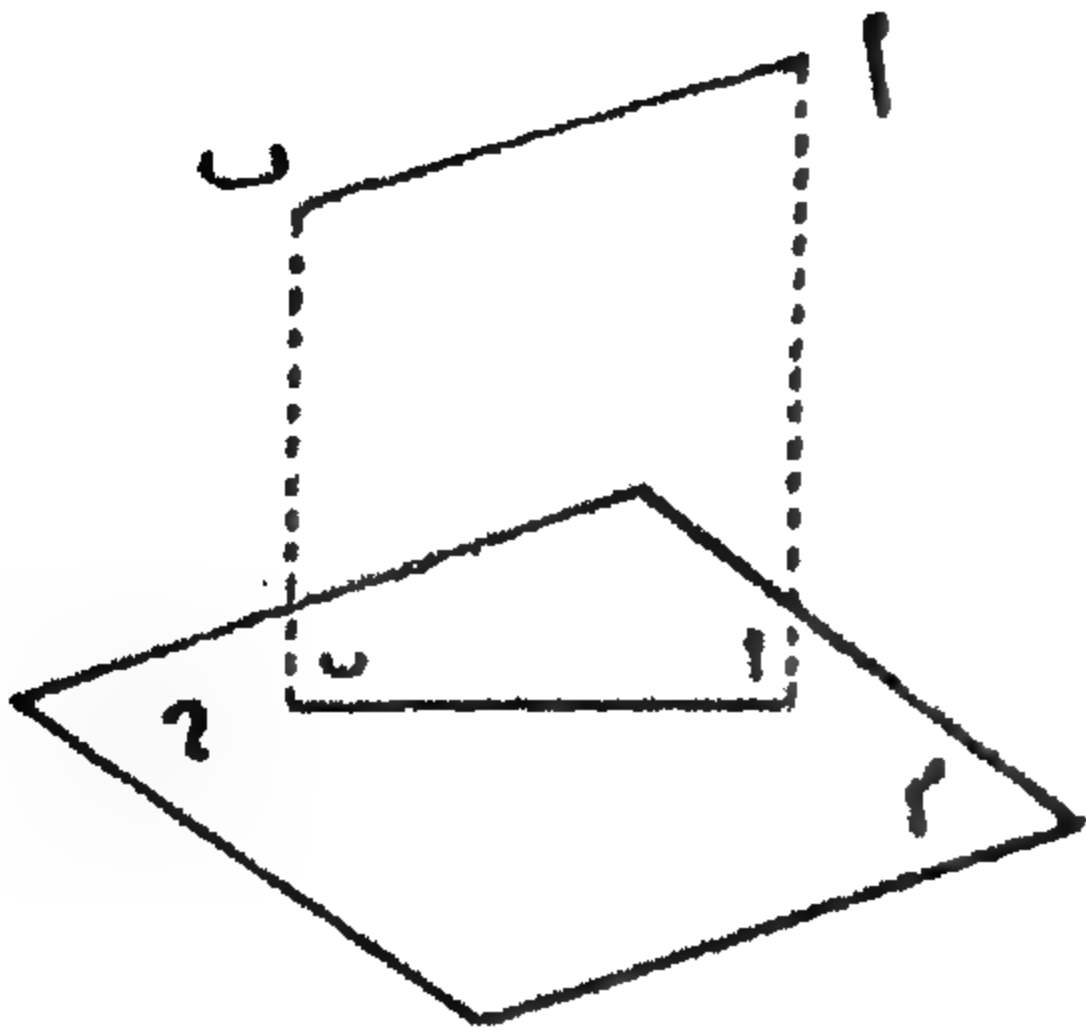
ولكن  $AB$  لا يمكن ان يتقابل مع  $CD$  لانه مواز له فلا يمكن ان يقابل المستوى  $\pi$

٥٠. المستوى م ٥ يوازي المستقيم ا ب وهو المطلوب
- النظرية الحادية عشر: — عكس النظرية السابقة صحيح وتترك للطالب البرهنة عليها وهي : —
- إذا وازى مستقيم مستويا فانه يوازي المستقيم المرسوم في هذا المستوى وموجود في مستويه
- ٥ — موقع العمود النازل من أى نقطة على اى مستوى يقال له مسقط تلك النقطة على ذلك المستوى
- ٦ — الخط المرسوم من أى نقطة عمودا على أى مستوي يقال له احدائى تلك النقطة وهو بعدها عن ذلك المستوى . وبعد النقطة عن المستوى الافقى هو احدائىها الرأسى وبعدها عن المستوى الرأسى هو احدائىها الافقى .
- ٧ — مسقط اى خط على اى مستوي هو الخط المحتوى على مساقط جميع نقط ذلك الخط ( شكل ١١ )



( شكل ١١ )

النظرية الثانية عشر: — مسقط الخط المستقيم على اى مستوى هو خط مستقيم



المفروضه : الخط المستقيم  $AB$  والمستوى  
 $M$  ( شكل ١٢ )

والمطلوب اثباته : ان مسقط  $AB$  على  
 المستوى  $M$  هو خط مستقيم

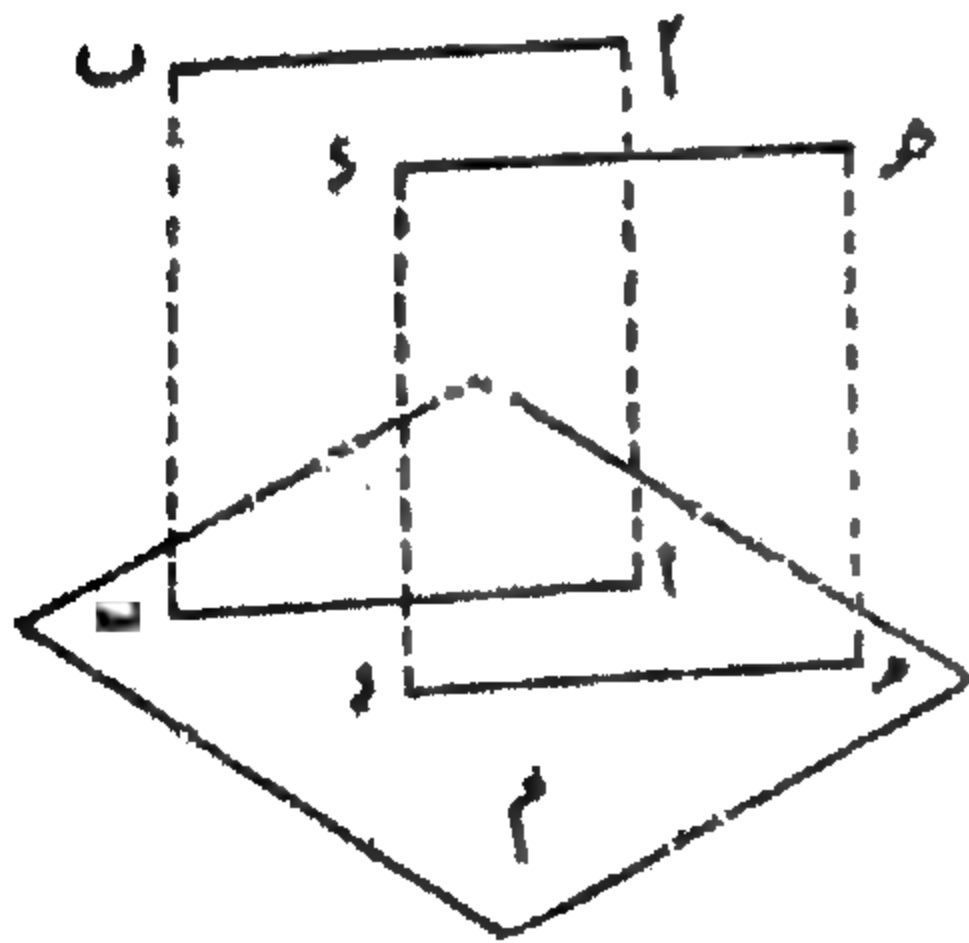
البرهان : لنفرض ان  $AB$  هو مستو  
 يحتوي على الخط  $AB$  وعمود على المستوى  $M$

فيكون كل خط مرسوم من اى نقطة من نقط الخط  $AB$  وعمود على المستوى  $M$   
 واقعا في المستوى  $AB$  ( النظرية الخامسة )

وبذلك تكون احداثيات جميع نقط الخط  $AB$  واقعة بتمامها في المستوى  $AB$   
 وجميع مواقع تلك الاحداثيات تكون واقعة على خط تقاطع المستويين المذكورين  
 وهو الخط المستقيم  $AB$  او ان مسقط  $AB$  هو الخط المستقيم  $AB$  وهو المطلوب  
 نتيجة : مسقط الخط المستقيم على اى مستوى مواز له هو خط مستقيم يساويه

في الطول

وذلك لان المستقيم ومسقطه واحداثييه نهايتيه تكون مستطيلا ( شكل ١٠ )



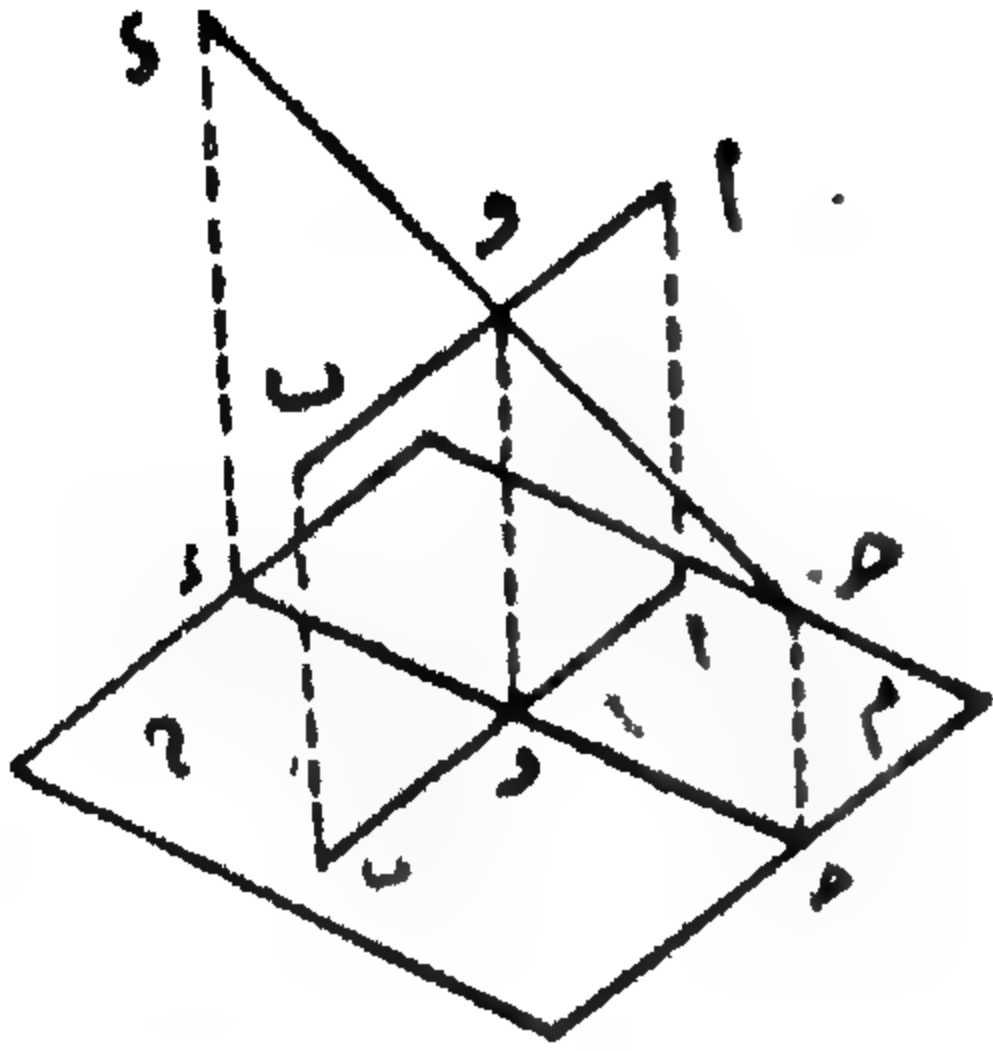
نتيجة ٢ — اذا توازي مستقيمان  
 فان مسقطيهما على اى مستو متوازيان  
 ( شكل ١٣ ) .

النظرية الثالثة عشر : اذا تعامد  
 مستقيمان على بعضهما وكان احدهما موازيا  
 لآى مستو فان مسقطيهما على هذا  
 المستوى متعامدان

المفروض : المستقيمان  $AB$  و  $CD$

( شكل ١٣ )

المتعامدان على بعضهما ( شكل ١٤ ) وان  $AB$  يوازي المستوى  $M$



( شكل ١٤ )

والمطلوب اثباته : ان مستقيهما  $ab$   
و  $cd$  متعامدان أيضا

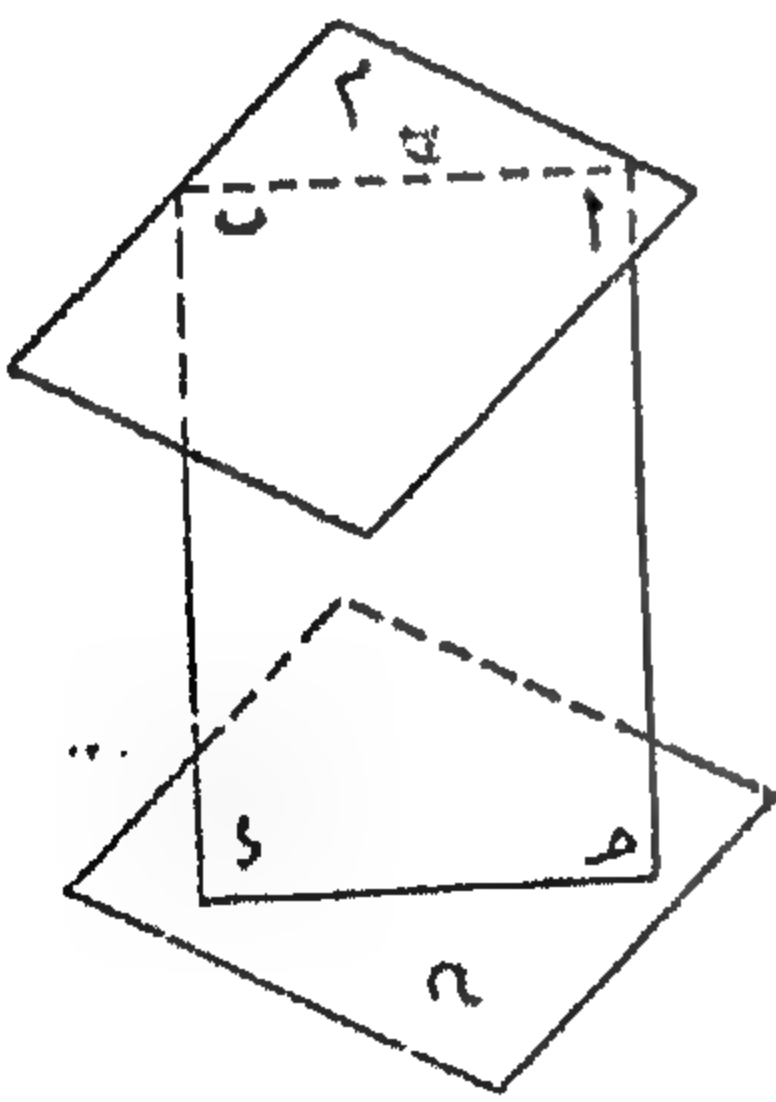
البرهان : حيث ان الخط  $a$  و مواز  
للمستوى  $m$  فيكون موازيا لمسقطه  $a$  و عليه  
( نتيجة من النظرية السابقة )

وحيث ان  $و$  و متعامدا على  $a$  و لانه احدائى  
نقطة و فيكون متعامدا ايضا على  $a$  و الموازى له

وحيث ان  $a$  و عمود على  $cd$  و فرضا فيكون  $a$  و عمودا على كل من الخطين  $cd$  و  
 $و$  ( و ) و وعلى مستويهما (  $cd$  و ) ( النظرية الثالثة )  
وحيث ان  $a$  و مواز للمستقيم  $a$  و فيكون عموديا على المستوى  $cd$  و وبذا  
يكون عمودا على المستقيم  $cd$  و

فيكون المسقطان  $ab$  و  $cd$  متعامدين وهو المطلوب

النظرية الرابعة عشر : اذا قطع مستو مستويين آخرين متوازيين فان  
خطى تقاطعه بهما متوازيان



( شكل ١٥ )

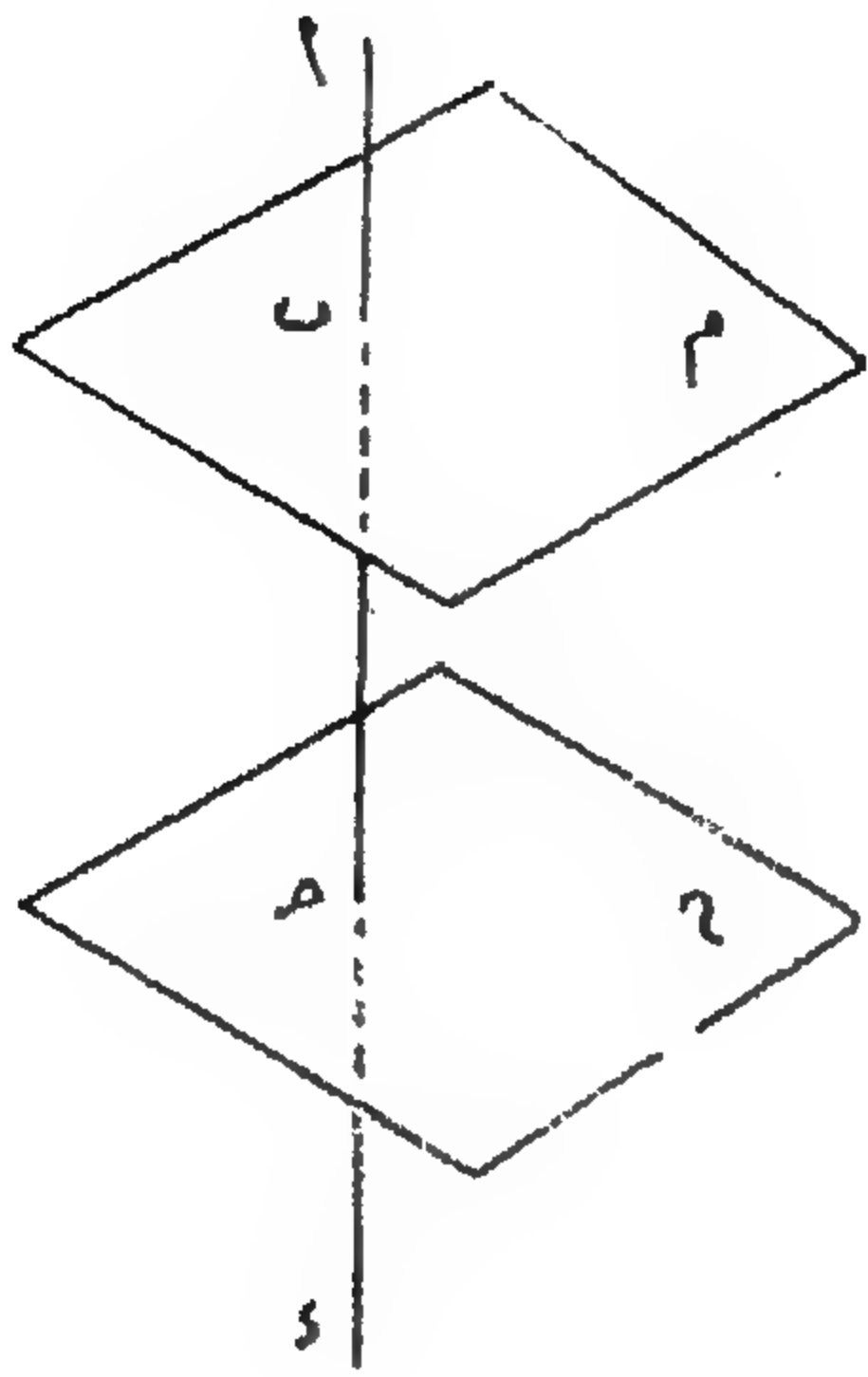
المفروضه : المستويان المتوازيان  $m$  و  $n$  والمستوى  
 $ab$  و قاطع لهما وان خطى تقاطعه بهما هما  $ab$  و  $cd$  ( شكل ١٥ )  
والمطلوب اثباته : ان  $ab$  و  $cd$  متوازيان

البرهان : اذا فرض ان  $ab$  و ليسا متوازيين  
فيمكن تقابلهما فى نقطة مثل  $e$  مثلا وتلك النقطة لا بد وان  
توجد فى كل من المستويين  $m$  و  $n$  وهذا مخالف لتوازيهما

∴  $ab$  و لا يمكن تقابلهما فيكونان متوازيين وهو المطلوب

النظرية الخامسة عشر : كل المستويات العمودى عليها مستقيم واحد متوازية





المفروضه : المستويان م و ن والمستقيم  
 ا عمود على كل منهما في ساحة على  
 التوالي ( شكل ١٦ )  
 والمطلوب اثباته : ان المستويين  
 م و ن متوازيان

البرهان المستويين م و ن لا يمكن  
 تلاقيهما لانهما اذا تلاقيا يتلاقيان في  
 خط مستقيم ولا يمكن اذا رسم خطين  
 مائلين واصليين من النقطتين ساحة  
 لاحدى نقط خط تقاطعهما ولكن

( شكل ١٦ )

المستقيم ا عمود على كل من المستويين فيكون عمودا على كل خط يلاقيه في المستويين  
 واذا يكون عمودا على كل من الخطين المائلين المذكورين وهذا خلاف  
 . . . المستويان م و ن متوازيان ويوازيان كل مستو آخر يكون المستقيم ا  
 عمودا عليه وهو المطلوب

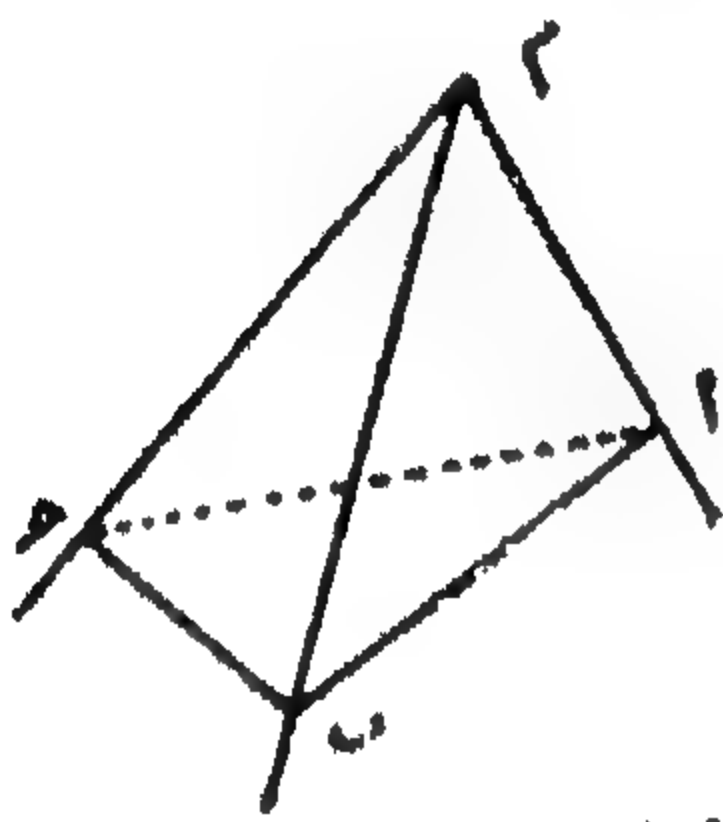


## الفصل الثاني

### في الاجسام

#### الزوايا المجسمة :

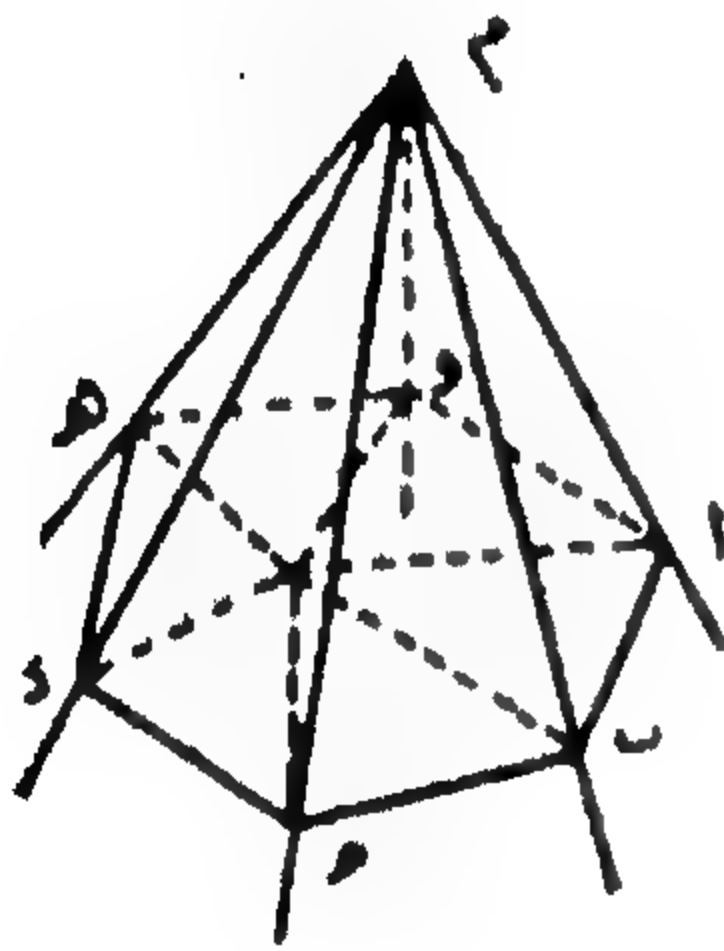
٨ — يطلق اسم الزاوية المجسمة على الفراغ المحدود بثلاث مستويات او



( شكل ١٧ )

١ أكثر تتلاقى في نقطة واحدة ولا يشترك أى ثلاثة منها  
في مستقيم وكل مستويين من هذه المستويات يتقاطعان  
في مستقيم واحد يسمى بحرف المجسمة  
والمستويات المحصورة بين الاحرف المتتالية تسمى  
بأوجه المجسمة

والنقطة التي تتلاقى فيها مستويات المجسمة تسمى  
برأس المجسمة وتقرأ الزاوية المجسمة برأسها كالمجسمة م ( شكل ١٧ )



( شكل ١٨ )

فاذا تكونت الزاوية المجسمة من ثلاثة أوجه  
سميت ثلاثية واذا كانت أوجهها أكثر من ثلاثة  
سميت زاوية مجسمة فقط كما في ( شكل ١٨ )

ومجموع أي زاويتين من زوايا أوجه الزاوية  
المجسمة الثلاثية أكبر من الثالثة

النظرية السادسة عشر : كل زاوية مجسمة فيها مجموع زوايا الأوجه أصغر  
من مجموع أربع زوايا قوائم

المفروضة : ان م . ا . ب . ح . د ه و زاوية مجسمة ( شكل ١٨ )

المطلوب اثباته : ان مجموع زوايا الأوجه ا م . ب . ح . د ه و ح م . د . ا . ب . ح  
أصغر من أربع زوايا قوائم

**العمل :** ارسم مستويًا ما يقطع احرف المجسمة في  $a, b, c, d, e, f, g, h$   
ثم اطلق على المضلع  $a, b, c, d, e, f, g, h$  اسم القاعدة وعلى كل من زوايا هذا المضلع  
كزاوية  $a, b, c, d, e, f, g, h$  اسم زاوية القاعدة وعلى كل زاوية من زوايا الواجهة المثلثية كزاوية  
 $a, b, c, d, e, f, g, h$  اسم الزاوية التي بالرأس وعلى كل من الزوايا الاخرى للواجهة المثلثية كزاوية  
 $a, b, c, d, e, f, g, h$  اسم الزاوية التي بقاعدة الوجه

∴  $a, b, c, d, e, f, g, h + a, b, c, d, e, f, g, h$  اكبر من  $a, b, c, d, e, f, g, h$

$a, b, c, d, e, f, g, h + a, b, c, d, e, f, g, h$  اكبر من  $a, b, c, d, e, f, g, h$  وهم جرا

لان كل زاويتين من زوايا الزاوية المجسمة الثلاثية اكبر من الثالثة (بند ٨)  
∴ مجموع الزوايا التي بقواعد الواجهة المثلثية اكبر من مجموع زوايا القاعدة  
وحيث أن مجموع زوايا القاعدة تساوى  $(2 - 4) = 4$  بفرض أن  $n$   
عدد اضلاع المضلع  $a, b, c, d, e, f, g, h$

∴ مجموع زوايا قواعد الواجهة المثلثية اكبر من  $(2 - 4) = 4$

ولكن مجموع الزوايا التي بقواعد الواجهة المثلثية + مجموع الزوايا التي بالرأس  
 $= 2$  من القوائم  $= 2 = 4$

∴  $2 = 4 -$  مجموع الزوايا التي بالرأس اكبر من  $(2 - 4) = 4$

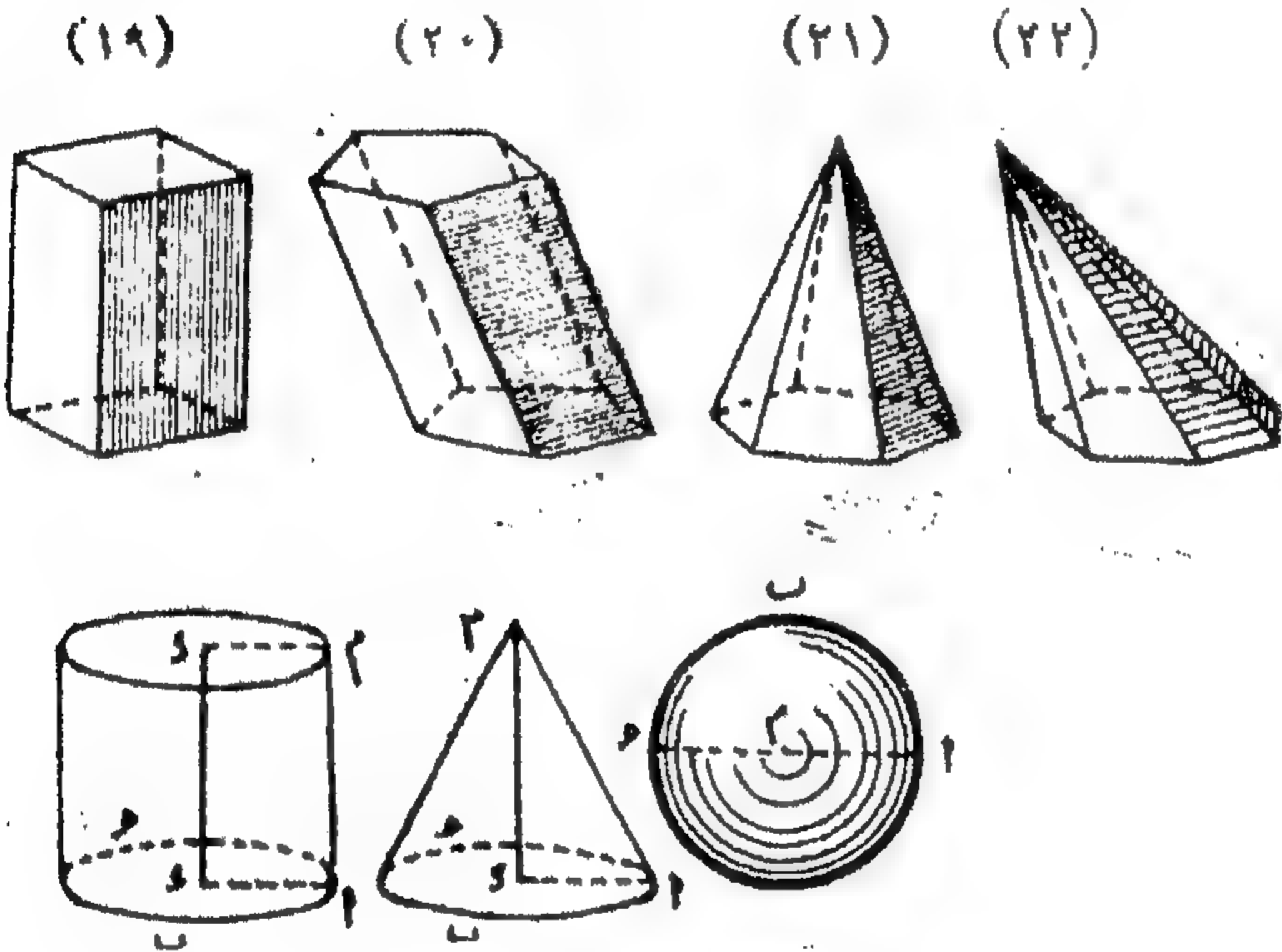
أى أن مجموع الزوايا التي بالرأس اصغر من  $4$  وهو المطلوب

٩ — كُعبات السطوح : كثير السطوح هو جسم محدود كله بمستويات  
من جميع جهاته وتسمى هذه المستويات باوجه كثير السطوح والمستقيمت التي تتقاطع  
فيها المستويات باحرفه وتقط تقاطع الخطوط برؤوسه .

١٠ — الهرم الثلاثي : يُطلق على الجسم المكوّن من أربعة أوجه وهو  
أقلها بالهرم الثلاثي ويسمى أي جسم آخر بعدد أوجهه فما كان مكوّنًا من خمسة أوجه  
سمى بندي الخمسة أوجه وما كان مكوّنًا من ستة أوجه بندي الستة أوجه وهكذا .

يطلق المنشور على كثير السطوح الذي فيه وجهان مضلعان متوازيان ومتساويان وموضوعة أحرف أحدهما فوق أحرف الآخر وموازية لها كل نظيره والأوجه الأخرى وهي الجانبية أشكال متوازية الاضلاع واصله بين الأحرف المتساوية المتوازية للقاعدتين . ويسمى المضلعان بقاعدتي المنشور ويسمى المنشور بشكل قاعدته فإذا كانت قاعدته مخمسة أطلق عليه منشور مخمس كما في ( شكل ٢٠ ) وهكذا

أشكال



(٢٣)

(٢٤)

(٢٥)

ويسمى كل وجه من الأوجه الأخرى بالوجه الجانبي للمنشور وتسمى أحرف كل وجه جانبي بأحرفه الجانبية

ويسمى المنشور قائما إذا كانت أحراره الجانبية عمودية على إحدى قاعدتيه وعلى هذا تكون أوجه المنشور القائم كلها مستطيلات كما في ( شكل ١٩ ) .

ويسمى المنشور منتظما إذا كانت قاعدته مضلعين منتظمين

ويسمى المنشور الذي قاعدته « متوزيا أضلاع » بمتوازي السطوح فتكون جميع أوجه متوازي السطوح كلها أشكالا متوازية الاضلاع وكل وجهين متقابلين منها متساويين



ويكون متوازي السطوح قائما أو مائلا فإذا كان قائما وكانت قاعدته مستطيانا  
سمى متوازي المستطيلات ( شكل ١٩ )  
والمكعب هو متوازي مستطيلات أوجهه مربعات متساوية كما في ( شكل ٢٧ )  
وكثير السطوح المنتظم هو ما كانت جميع أوجهه مضلعات منتظمة متساوية  
وجميع زواياه المجسمة متساوية كما في الاشكال ( من ٢٦ الى ٣٠ )  
الاجسام المستديرة :

١١ — الاسطوانة : الاسطوانة هي جسم مستدير يتكون سطحه الأسطواني  
من حركة مستقيم مثل م ا يقطع منحنيا معلوما مثل المنحنى ا ب ه ويوازي أثناء دورانه  
مستقيما معلوما مثل المستقيم د ه يسمى بمحور الاسطوانة ( شكل ٢٣ ) ويسمى المستقيم  
المتحرك م ا براسم الاسطوانة وأما الخط المنحنى ا ب ه الذي يقطعه الراسم أثناء  
الدوران فيسمى الدليل

فإذا كان الراسم عموديا على القاعدة سميت الاسطوانة قائمة وفي غير ذلك تسمى  
مائلة وإذا كان الدليل محيط دائرة سميت الاسطوانة دائرية . وإذا قطعت الاسطوانة  
الدائرية بمستويوازي قاعدتها كان المقطع الحادث دائرة تساوي القاعدة  
وإذا قطعت الاسطوانة الدائرية القائمة بمستويوازي محورها كان المقطع  
الحادث مستطيلا

١٢ — المخروط : المخروط هو جسم يتكون سطحه المخروطي من حركة مستقيم  
مثل م ا يمر بنقطة معينة مثل م ويقطع منحنيا معلوما مثل المنحنى ا ب ه وتسمى النقطة  
الثابتة م رأس المخروط والمستقيم المتحرك م ا راسمه ويسمى الخط المنحنى ا ب ه  
الذي يقطعه الراسم بالدليل كما في ( شكل ٢٤ ) والمستوى الذي يحدد السطح المخروطي  
يسمى بقاعدة المخروط . إذا كان الدليل متماثلا بالنسبة الى نقطة ما مثل د يسمى المستقيم  
م د الواصل من هذه النقطة الى رأس المخروط بمحوره فإذا كان المحور عموديا على  
القاعدة سمي المخروط قائما وفي غير ذلك يسمى مائلا

وإذا كان الدليل دائرة سمي المخروط دائرياً ويكون المخروط الدائري قائماً أو مائلاً إذا كان محوره عمودياً على قاعدته أو مائلاً عليها على التوالي وإذا قُطع المخروط الدائري بمستوى يوازي القاعدة كان المقطع الحادث دائرة أما إذا كان المستوى ماراً بالرأس وقاطعاً لسطح المخروط كان المقطع الحادث مثلثاً.

وإذا قطع المخروط بمستوى موازي للقاعدة وحذف الجزء الذي بين الرأس والمستوى القاطع سمي الجزء الباقي بالمخروط الناقص المتوازي القاعدتين

١٣ - الكرة : - الكرة هي جسم مستدير يتكوّن سطحه الكروي من دوران نصف محيط دائرة مثل  $ABC$  حول قطرها  $AC$  ومركز الكرة هو مركز نصف الدائرة  $m$  الذي يتولد منها السطح وكل مستقيم مار بمركز الكرة وينتهي طرفاه بـ سطح الكرة يسمى قطرها مثل  $AC$  كما في (شكل ٢٥)

وإذا قطعت الكرة بمستوى ما فإن المقطع الحادث هو دائرة وتقاطع كرتين ببعضها يحدث دائرة أيضاً

وكل أربع نقط ليست في مستوى واحد يمكن أن تمر بها كرة واحدة ولا يمكن أن يمر بها غيرها

١٤ - الهرم : - الهرم هو جسم كثير السطوح أحد أوجهه مضلع أيّاً كان ويسمى بقاعدة الهرم وأوجهه الأخرى مثلثات قواعدها هي أضلاع هذا المضلع ورؤوسها مجتمعة في نقطة واحدة خارجة عنه تسمى رأسه

والخط المستقيم الواصل من الرأس لمركز القاعدة يسمى محور الهرم فإذا كان المحور عمودياً على القاعدة سمي الهرم قائماً كما في (شكل ٢١)

وإذا كان المحور مائلاً على القاعدة سمي الهرم مائلاً كما في (شكل ٢٢)

النظرية السابعة عشر : لا يمكن أن يوجد أكثر من خمسة أنواع من كثيرات السطوح المنتظمة

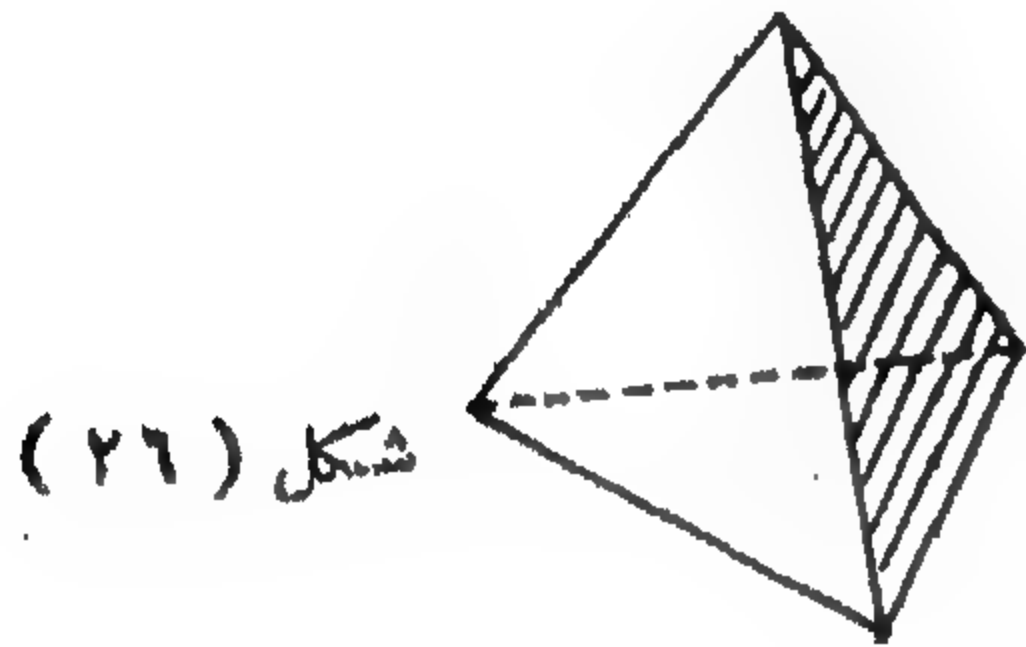
البرهان : إذا كان كثير السطوح منتظماً يجب أن تكون جميع أوجهه أشكالاً منتظمة وهذه إما أن تكون مثلثات متساوية الأضلاع (وكل زاوية من زواياها  $60^\circ$ )

أو مربعات ( وكل زاوية من زواياها  $90^\circ$  ) أو خمسات ( وكل زاوية من زواياها  $108^\circ$  )  
أو سدسات ( وكل زاوية من زواياها  $120^\circ$  ) وهكذا . وحيث أنه يجب أن يكون  
مجموع الزوايا المستوية المكونة لأوجه الزاوية المجسمة أقل من أربع قوائم أى أقل  
من  $360^\circ$  ( نظرية ١٦ )

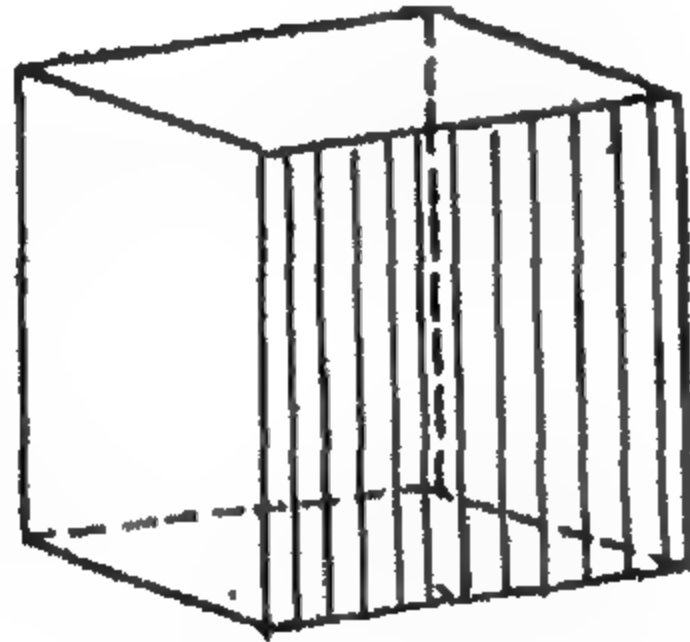
ينتج أنه يمكن فقط إيجاد زاوية مجسمة محدودة إما بمثلثات متساوية الأضلاع  
عددها ثلاثة ( شكل ٢٦ ) أو أربعة فقط ( شكل ٢٨ ) أو خمسة فقط ( شكل ٣٠ )  
ولا يمكن أن تكون أكثر من ذلك بسبب أن الزوايا المستوية المكونة لأوجه  
المجسمة لا تزيد عن  $360^\circ$

وأما أن تكون الزاوية المجسمة محدودة بثلاث مربعات ولا أكثر بالسبب عينا ( شكل ٢٧ )  
وأما أن تكون المجسمة محدودة بثلاث خمسات منتظمة ولا أكثر ( شكل ٢٩ )  
ولا يمكن أن تكون المجسمة محدودة بثلاث سدسات لنفس السبب .

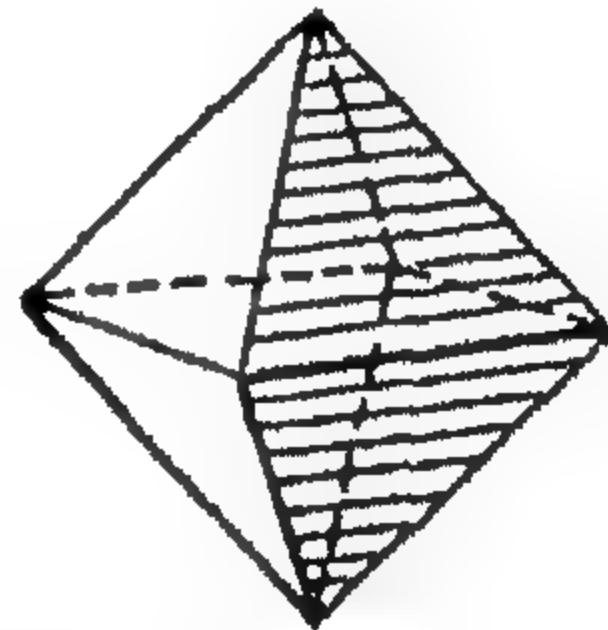
وعلى ذلك لا يمكن أن يكون هناك أكثر من خمسة أنواع من كثيرات السطوح  
المنتظمة وهى : —



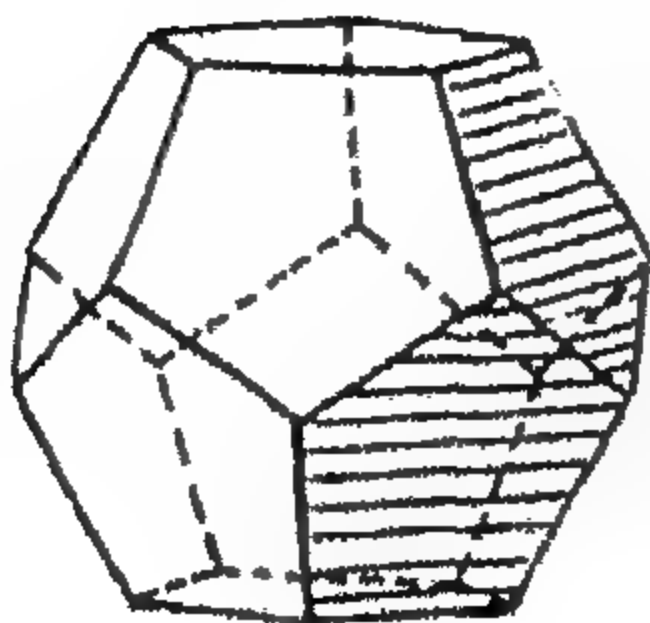
شكل ( ٢٦ )



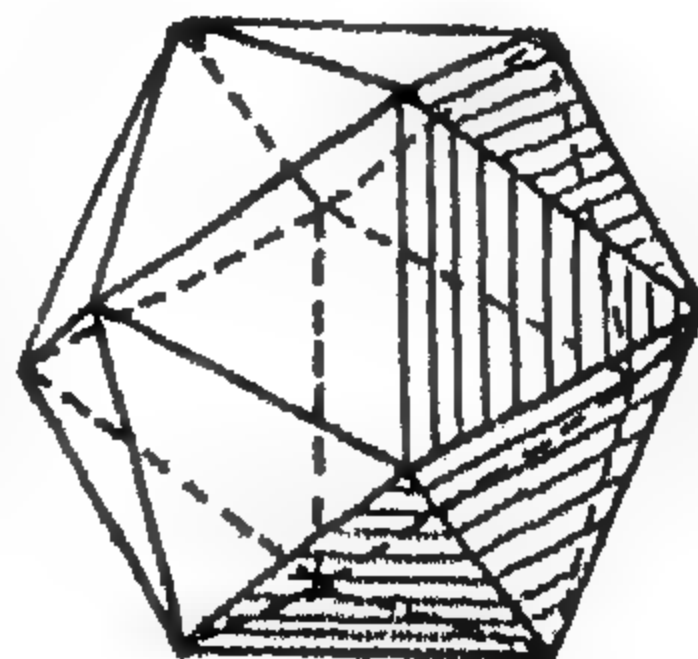
» ( ٢٧ )



شكل ( ٢٨ )



» ( ٢٩ )



» ( ٣٠ )

أولاً — الهرم الثلاثي : وهو ما تكون من زاوية مجسمة محدودة بثلاث مثلثات متساوية فتكون قاعدته مثلثا متساوي الأضلاع أيضا مساويا لمثلثات الأوجه الأخرى كما في ( شكل ٢٦ )

ثانياً — المكعب : وهو ما تكون من ستة أوجه وكلها مربعات متساوية كما في ( شكل ٢٧ )

ثالثاً — كثير السطوح المنتظم ذو الثمانية أوجه : وهو ما تكون من ثمانية متساويين قاعدتهما منطقتان على بعضهما وكل رأس منها مكونة من زاوية مجسمة محدودة بأربع مثلثات متساوية الأضلاع كما في ( شكل ٢٨ )

رابعاً — كثير السطوح ذو الاثني عشر وجهها : وهو ما كانت كل زاوية من زواياه المجسمة محدودة بثلاث مخمسات منتظمة كما في ( شكل ٢٩ )

خامساً — كثير السطوح ذو العشرين وجهها : وهو ما تكونت كل زاوية من زواياه المجسمة من خمسة مثلثات متساوية الأضلاع كما في ( شكل ٣٠ ) والجدول التالي يبين انواع كثيرات السطوح الخمس المنتظمة وعدد أوجهه وعدد أضلاع كل وجه وعدد احرف أوجهها وعدد الأوجه المتجمعة في كل رأس منها وعدد رؤوس كل منها :

عدد الرؤوس	عدد الأوجه المتجمعة في كل رأس	عدد الاحرف	عدد اضلاع أحد الأوجه	عدد الأوجه	كثير السطوح المنتظم
٤	٣	٦	٣	٤	الهرم الثلاثي
٨	٣	١٢	٤	٦	المكعب
٦	٤	١٢	٣	٨	ذو الثمانية أوجه
٢٠	٣	٣٠	٥	١٢	« الاثني عشر وجهاً »
١٢	٥	٣٠	٣	٢٠	« العشرين وجهاً »



( تمرينات متنوعة على الهندسة الفراغية )

- ( ١ ) الزاوية  $\alpha$  قائمة و  $\gamma$  عمود على المستوى  $\alpha$  حـ إثبت أن  $\alpha$  عمود على  $\gamma$
- ( ٢ ) إثبت أنه إذا تقاطعت ثلاث مستويات فاما أن تتلاقى خطوط التقاطع في نقطة أو تتوازي .
- ( ٣ ) إذا تقاطعت ثلاث مستقيمت في نقطة واحدة وقطع الجميع مستقيماً رابعاً غير مار بتلك النقطة . إثبت أن المستقيمت الأربعة في مستو واحد .
- ( ٤ ) إذا توازت ثلاثة مستقيمت وقطع الجميع مستقيماً رابع . اثبت أن المستقيمت الأربعة في مستو واحد .
- ( ٥ ) إثبت أنه إذا توازت ثلاثة مستقيمت وازى كل منها مستو مستقيمين الآخرين
- ( ٦ ) إثبت أنه إذا وازى مستو خط تقاطع مستويين آخرين كان قاطعاً لهما في مستقيمين متوازيين
- ( ٧ ) اثبت أنه لا يمكن أن يكون المستقيم عموداً على كل من مستويين متقاطعين .
- ( ٨ ) المطلوب رسم مستو يمر بنقطة معلومة ويكون عمودياً على مستقيم معلوم
- ( ٩ ) حجرة على شكل متوازي المستطيلات طولها ٦ أمتار وعرضها ٥ أمتار وارتفاعها ٤ أمتار والمطلوب إيجاد طول القطر الواصل من أحد أركان السقف الى الركن المقابل له على الارض .
- ( ١٠ ) إثبت أن العمود النازل على مستو من نقطة خارجة عنه أقصر من أى خط ممدود من تلك النقطة الى المستوى
- ( ١١ ) إثبت أن البعد بين المستويين المتوازيين ثابت
- ( ١٢ ) إثبت أنه إذا توازت المستقيمت المتساوية ساوت وتوازت مساقطها على مستو معلوم

- (١٣) مستقيمان  $AB$  و  $CD$  ليسا في مستو واحد والمطلوب رسم مستوى يمر بأحدهما ويوازي الآخر .
- (١٤) مستقيمان  $AB$  و  $CD$  ليسا في مستو واحد والمطلوب رسم مستوى يمر بنقطة معلومة ويوازي كلا من المستقيمين المعلومين .
- (١٥) المطلوب إيجاد نقطة مثل  $L$  على مستقيم فراغى  $AB$  بحيث اذا مد منها مستقيم الى كل من نقطتين معلومتين مثل  $M$  و  $N$  كان  $LM = LN$  .
- (١٦) اثبت أن مجموع زوايا أي شكل رباعي ليست أضلاعه في مستو واحد أقل من أربع قوائم .
- (١٧) اثبت أنه اذا قطع مستو أحرف زاوية مجسمة ثلاثية بحيث جعلها متساوية كان موقع العمود البازل من رأس المجسمة على المستوى هو مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث الحادث من تقاطع المستوى بأوجه الزاوية .
- وهذا يتم ما يحتاج اليه الطالب في علم الهندسة الفراغية لفهم ما يلي في الهندسة الوصفية .



## الهندسة الوصفية

### الفصل الثالث

#### في مساقط النقط والخطوط

١٥- علم الهندسة الوصفية : هو ذلك الفرع الهندسى الذى يمثّل في تمثيل النقط والخطوط والاشكال والاجسام الموجودة في الفراغ على أسطح مستوية بحيث يمكن تعيين مواضعها وأبعادها الحقيقية .

وبمعنى آخر أنه هو ذاك الفرع الذى بواسطته يمكننا أن نضع رسومات دقيقة للآلات والمنشآت أو أجزائها ونحويل جميع المسائل المتعلقة بالاشكال المجسمة وغير المجسمة في الهندسة الفراغية الى نظيراتها على شكل الهندسة المستوية وذلك بإسقاط تلك الأجسام وغير الاجسام على أسطح مستوية .

١٦- المساقط : تكلمنا في الهندسة الفراغية عن مسقط النقطة على أى مستو ويمكن به الاستمارة على فهم معنى مسقط خط مستقيم أو مسقط سطح على مستوى لان السطح يتكون من خطوط والخط من جملة نقط .

فمسقط النقطة على أى مستو يقصد به في علم الهندسة الوصفية موقع العمود النازل من هذه النقطة على المستوى . ومسقط الخط على أى مستو هو الخط المحتوى على مساقط جميع نقط هذا الخط . انظر ( شكل ١١ )

وقد يلاحظ أنه عند تعيين موضع أى شكل في الفراغ بواسطة المساقط لا يكفي لذلك إسقاطه على مستو واحد حتى نعين حقيقة بل ربما نحتاج الى إسقاطه على مستويين أو ثلاثة .

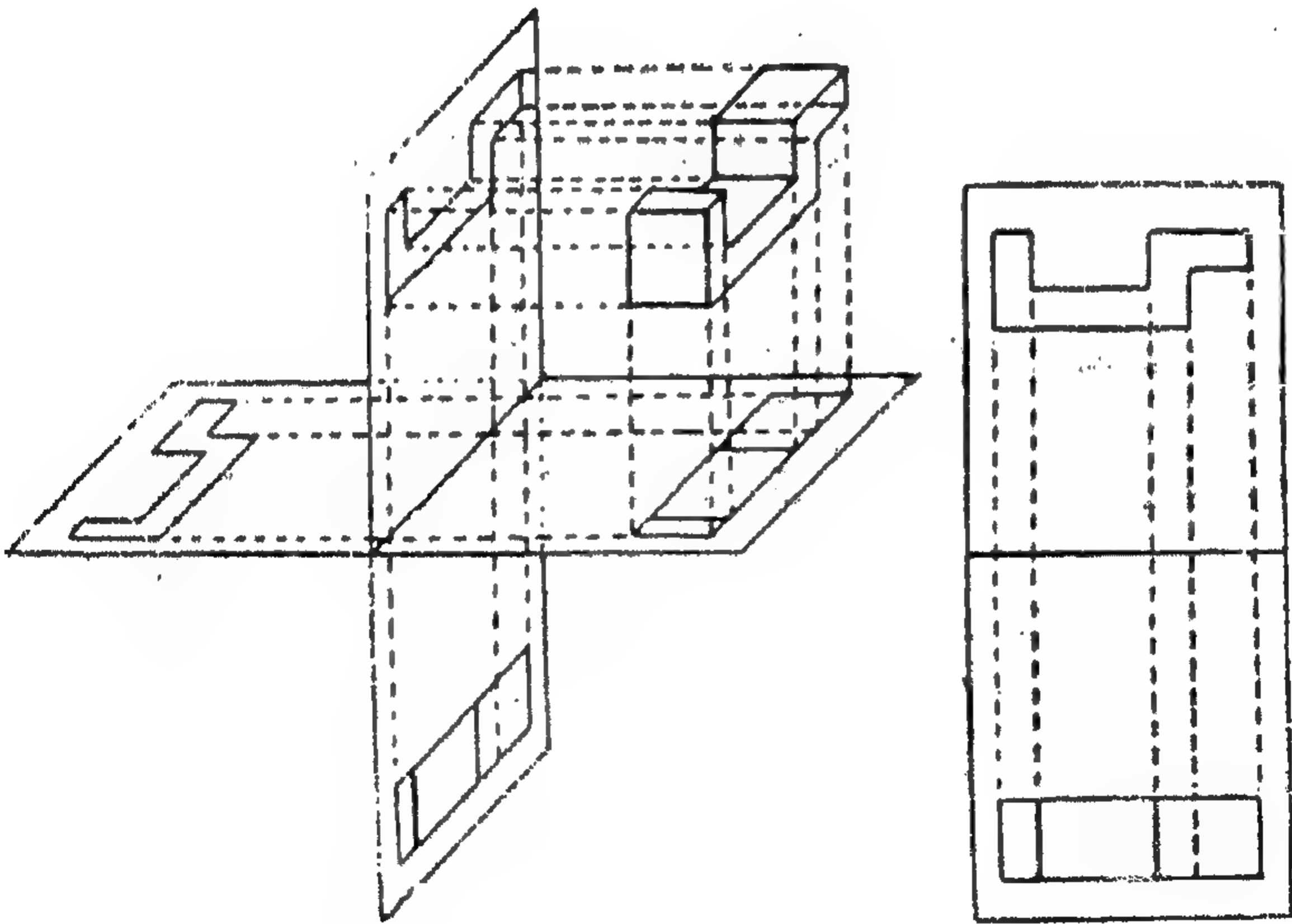
فمثلا اذا فرض أن  $AB$  هو مسقط أى مثلث موجود في الفراغ فن الواضح

أن حقيقة هذا المثلث تتوقف على معرفة زواياه وأطوال أضلائه . فسقط واحد إذا لا يعطينا تلك المعلومات فإذا أخذنا مسقطاً آخر لهذا المثلث مثل  $A_2$  على مستوى آخر عمودي على المستوى الأول لا يمكننا أن نعين تماماً حقيقة شكله وأبعاده

وشكل (٣٢) يبين تمثيل جسم بواسطة مسقطين له على كل من مستويين متعامدين وأحد المستويين أفقي والآخر رأسي وهذان المستويان يقسمان الفراغ المحيط بهما إلى أربعة زوايا وتسمى بالأولى والثانية والثالثة والرابعة الزوجية كما هو واضح (شكل ٣١)

ويسمى هذان المستويان بمستويي المسقط .

ويسمى المسقط الموجود على المستوى الأفقي بالمسقط الأفقي والموجود على المستوى الرأسي بالمسقط الرأسي



( شكل ٣١ )

( شكل ٣٢ )

فإذا تصورنا دوران المستوى الرأسي في ( الشكل ٣١ ) حول خط تقاطعه مع المستوى الأفقي ومعه المسقط الرأسي للشكل إلى أن يأخذ وضعاً أفقياً ( ينطبق مستويان



المسقط على بعضهما) ويظهر لنا المسقطان الرأسى الأفقى في مستو واحد كما هو مبين في (شكل ٣٢)

ويسمى خط تقاطع المستويين بخط الأرض .  
وقد يتمذر أحياناً بيان حقيقة أى شكل وموضعه في الفراغ من مسقطيه الرأسى والأفقى فقط ويحتاج الأمر الى رسم مسقط ثالث لاتمام جميع بياناته فيؤخذ هذا المسقط الثالث على مستو متعامد على كل من مستويي المسقط ويقال له المستوى الجانبي ويسمى المسقط المحتوى عليه هذا المستوى بالمسقط الجانبي وسيأتى الكلام على ذلك فيما بعد . فبذلك قد أمكننا تحويل شكل الجسم وقصوره في الفراغ إلى أشكال على أسطح مستوية كما في الهندسة المستوية

#### ١٧ - الرموز الاصطلاحية للمساقط الثلاث : -

يرمز للنقط والخطوط والأشكال والأجسام في الهندسة الوصفية بحروف وذلك لسهولة قراءتها وتمييزها

فعادة يرمز للنقطة في الفراغ بحرف غليظ ويرمز لمسقطها الأفقى بحرف عادى ومسقطها الرأسى بحرف فوقه شرطه ومسقطها الجانبي بحرف فوقه شرطتين ويقال للنقطة أ مثلاً ( أ ) اذا كانت ممثلة بمسقطين أ أ اذا كانت ممثلة بثلاثة مساقط وهكذا يسمى الخط أ ب مثلاً ( أ ب - أ ب ) أو ( أ ب - أ ب - أ ب )

النظرية الخامسة عشر : - مسقطا أى نقطة فراغية يقعان على مستقيم واحد

عمودى على خط الأرض .

المفروضه : النقطة أ في الفراغ وأن أ مسقطها الأفقى و أ مسقطها الرأسى

( شكل ٣٤ )

البرهان : - المستقيم أ عمود على المستوى الأفقى والمستقيم أ عمود على

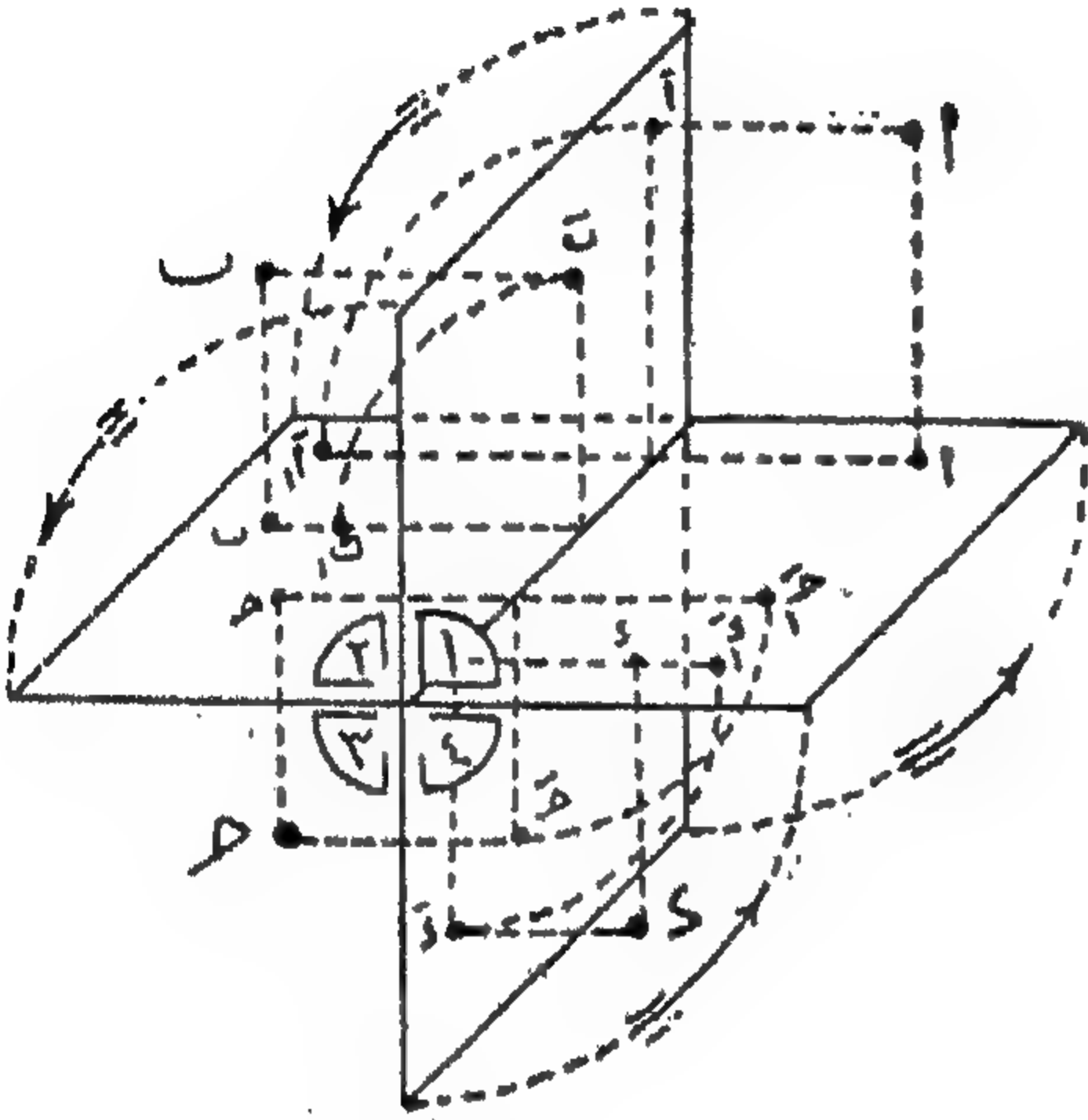
المستوى الرأسى فيكون مستويهما وهو أ أ عموداً على كل من مستويي المسقط الرأسى

والأفقى ويكون عموداً أيضاً على خط الأرض ( خط تقاطعهما )

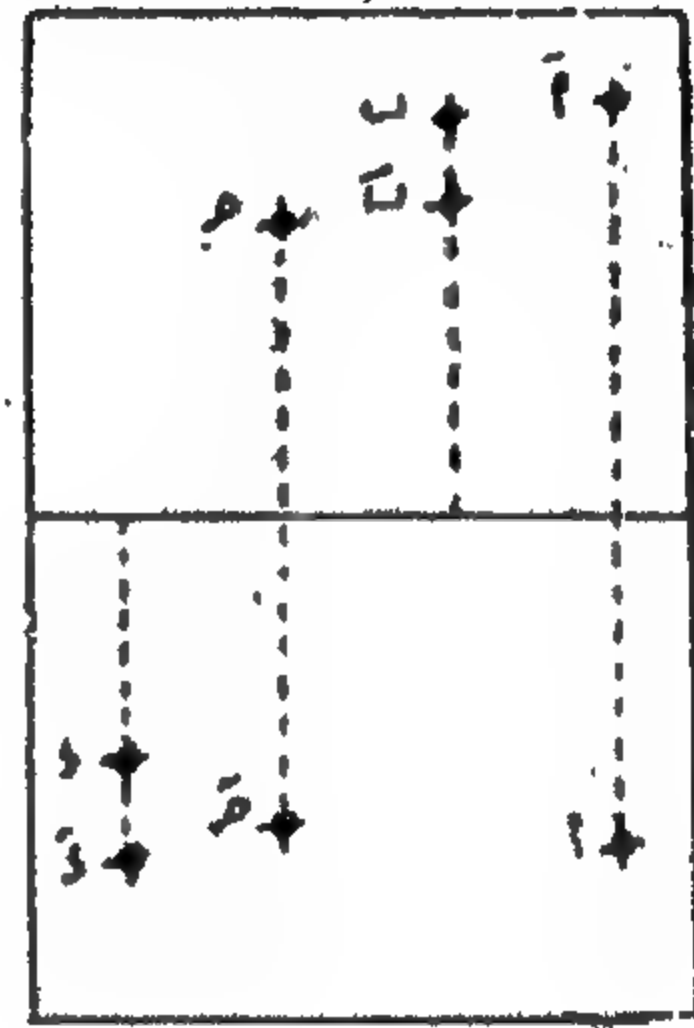
وبالعكس يكون خط التقاطع عموداً على مستويهما

٠٠ خط الارض عمود على  $\bar{A}$  بعد تطبيق المستوى الرأسى على المستوى الاقنى  
كافى ( شكل ٣٤ ) وهو المطلوب

أوضاع النقطة فى الفراغ ومساقطها على مستوي المسقط : —



( شكل ٣٣ )



( شكل ٣٤ )

يبين ( الشكل ٣٣ ) أوضاع النقطة فى الفراغ فى الزوايا الاربع فالنقطة  $A$  ومسقطها  
 $A_1$  موجودة فى الزاوية الاولى والنقطة  $B$  فى الزاوية الثانية ومسقطها  $B_1$  والنقطة  
 $C$  فى الزاوية الثالثة ومسقطها  $C_1$  والنقطة  $D$  فى الزاوية الرابعة ومسقطها  $D_1$ .  
يبين ( الشكل ٣٤ ) مسقط كل من الاربعه نقط المتقدمة على مستوى المسقط  
بعد انطباقهما وفيه يلاحظ أن : —

أولاً — النقطة  $A_1$  التى فى الزاوية الاولى يكون مسقطها الاقنى تحت خط الارض  
ومسقطها الرأسى فوق خط الارض

ثانياً — والنقطة  $B_1$  التى فى الزاوية الثانية يكون مسقطها الاقنى والرأسى  
موجودين فوق خط الارض

ثالثاً — والنقطة  $C_1$  التى فى الزاوية الثالثة يكون مسقطها الاقنى والرأسى  
موجودين تحت خط الارض .

وينتج من ذلك أن : —

أولاً — المسقط الأفقى للنقطة يكون تحت أو فوق خط الأرض اذا كانت النقطة أمام أو خلف المستوى الرأسى على التوالى .

ثانياً — ويكون المسقط الرأسى فوق خط الأرض او تحته اذا كانت النقطة فوق او تحت المستوى الأفقى على التوالى

ثالثاً — المسافة العمودية بين المسقط الأفقى لى نقطة وبين خط الأرض هي بعدها عن المستوى الرأسى . والمسافة العمودية بين مسقطها الرأسى وبين خط الأرض هي بعدها عن المستوى الأفقى . ومن ذلك يمكن تسمية النقطة بذكر بعدها عن كل من المستوى الرأسى والأفقى .

فمثلاً النقطة ( ٣ و ٤ ) س م . هي التى تبعد ٣ س م عن المستوى الرأسى و ٤ س م عن المستوى الأفقى على التوالى .

رابعاً — المسافة العمودية بين مسقطها الرأسى وخط الأرض تسمى بأحداثيتها الرأسى والمسافة العمودية بين مسقطها الأفقى وخط الأرض تسمى بأحداثيتها الأفقى والمستقيم الجامع للأحداثيين معاً للنقطة يسمى خط تذكر النقطة المذكورة . وخط ١ آ هو خط تذكر النقطة ١ ( شكل ٣٣ )

الطول الحقيقى وميل وائرى الخط المستقيم :

١٨ - تعاريف

مسقط الخط المستقيم على أى مستوى هو الخط الواصل بين مسقطى نهايتيه ويكون طول المسقط أقصر من الخط المستقيم دائماً إلا إذا وازى الخط المستقيم المستوى . وفى الحالة الأخيرة يكون مسقطه مساوياً طوله ويوازيه

ميل الخط المستقيم على أى مستوى يقدر بالزاوية الواقعة بين هذا الخط فى الفراغ وبين مسقطه على ذلك المستوى

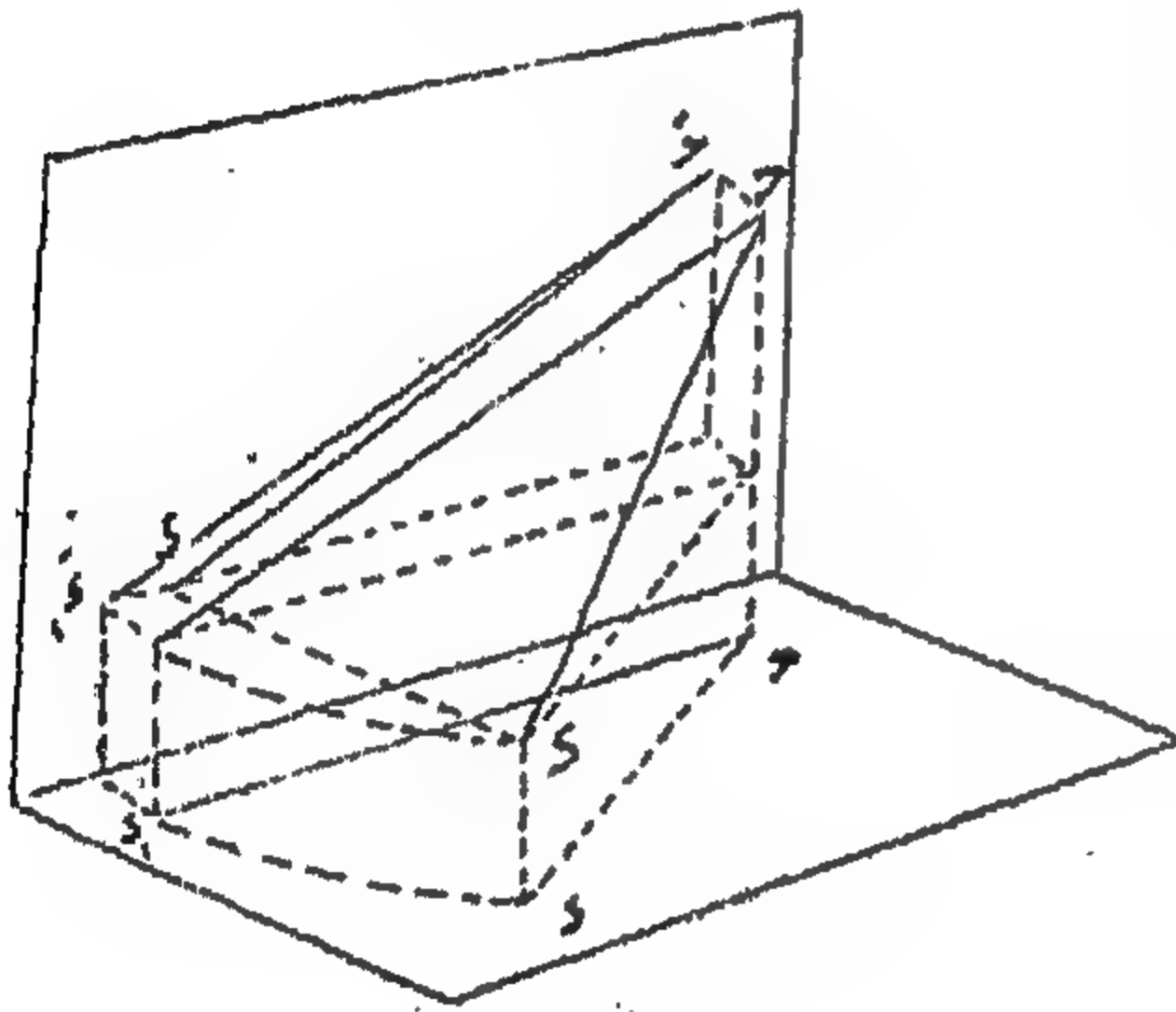
أثر الخط المستقيم على أى مستو هو نقطة تقابله مع هذا المستوى . وفى علم الهندسة الوصفية يقصد بأثر المستقيم نقطة تقابله مع كل من مستويي المسقط فأثره



وايضاً شبه المنحرف  $ا ب س ا$  فوق خط الارض الذي به  $ا ب$  هو الطول الحقيقي للخط والزواية  $\phi$  هي ميله على المستوى الرأسى

ويستنتج من ذلك أنه يمكننا اذا علمنا كلا من المسقط الرأسى والافقى لأى خط مثل  $ا ب$  أن نجد طوله الحقيقي وميله على كل من مستويي المسقط برسم عمودين على مسقطه الافقى من كلتا نهايتيه  $ا ب$  نأخذ عليهما على التوالى بعد كل من النقطتين  $ا ب$  عن المستوى الافقى او بعبارة اخرى بعد كل من  $ا ب$  عن خط الارض ونصل نهايتى العمودين المذكورين  $ا ب$  فيكون هو الطول الحقيقي للخط المذكور وتكون الزاوية  $\phi$  هي ميله على المستوى الافقى

وبالمثل اذا رسمنا عمودين من كلتا نهايتى المسقط الرأسى  $ا ب$  واخذنا عليهما كلا من البعدين  $ا ب$  و  $ب س$  مساويين الى بعدى النقطتين  $ا ب$  عن خط الارض على التوالى لكان  $ا ب س$  ايضاً هو الطول الحقيقي للخط والزواية  $\phi$  هي ميله على المستوى الرأسى وهذه الطريقة تسمى بطريقة الانطباق



( شكل ٣٧ )

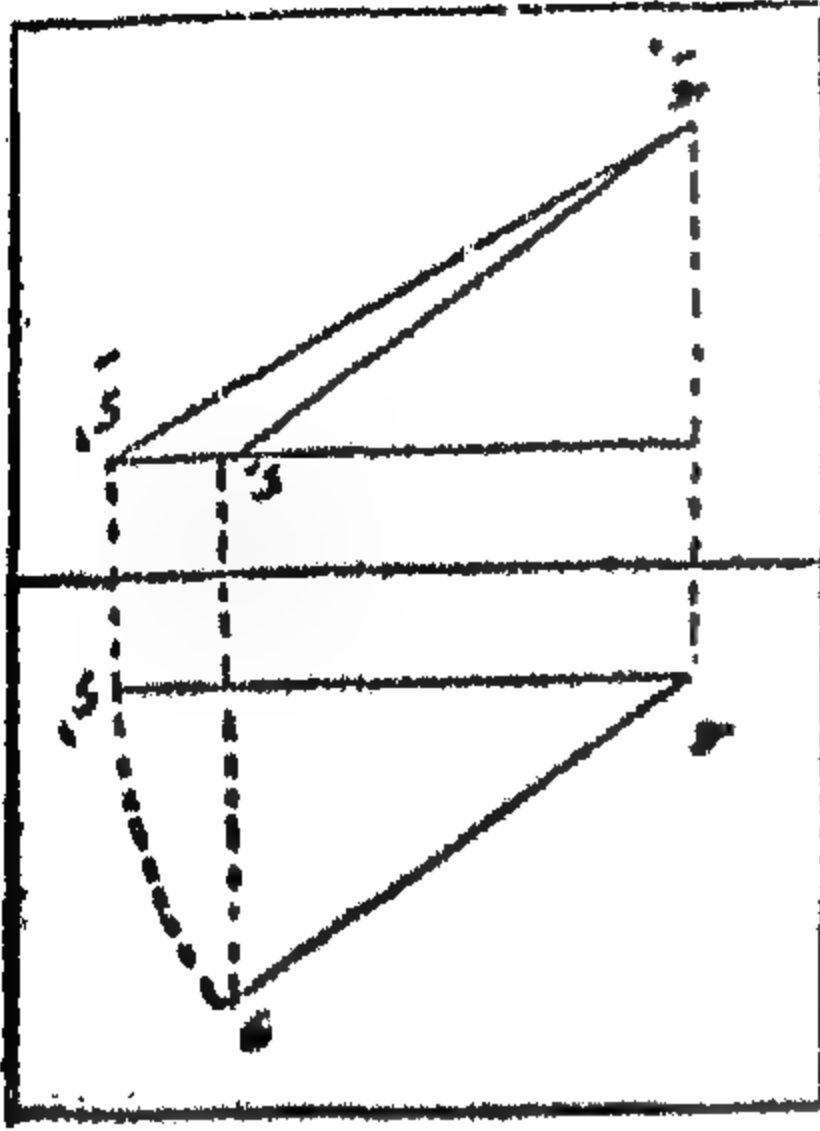
الطريقة الثمانية — من الشكل

المنظورة نمرة ٣٧ نرى أننا اذا تصورنا دوران الخط  $ح د$  بحيث تكون نهايته  $ح$  ثابتة ونهايته الاخرى  $د$  تدور بحيث يكون ارتفاعها عن المستوى الافقى ثابتاً الى أن يصير الخط  $ح د$  موازياً للمستوى الرأسى

لا تنقل مسقط النقطة  $د$  الرأسى وهو النقطة  $د$  على خط مستقيم أفقى الى  $د'$  وانتقل المسقط الافقى لها وهو  $د$  على قوس من دائرة الى النقطة  $د'$  حتى يصير المسقط الافقى نفسه موازياً الى المسقط الرأسى فيكون موازياً لخط الارض . وفي هذه الحالة يكون المسقط للرأسى الجديد  $ح د'$  هو طوله الحقيقي والزواية  $\phi$  هي ميله على المستوى الافقى

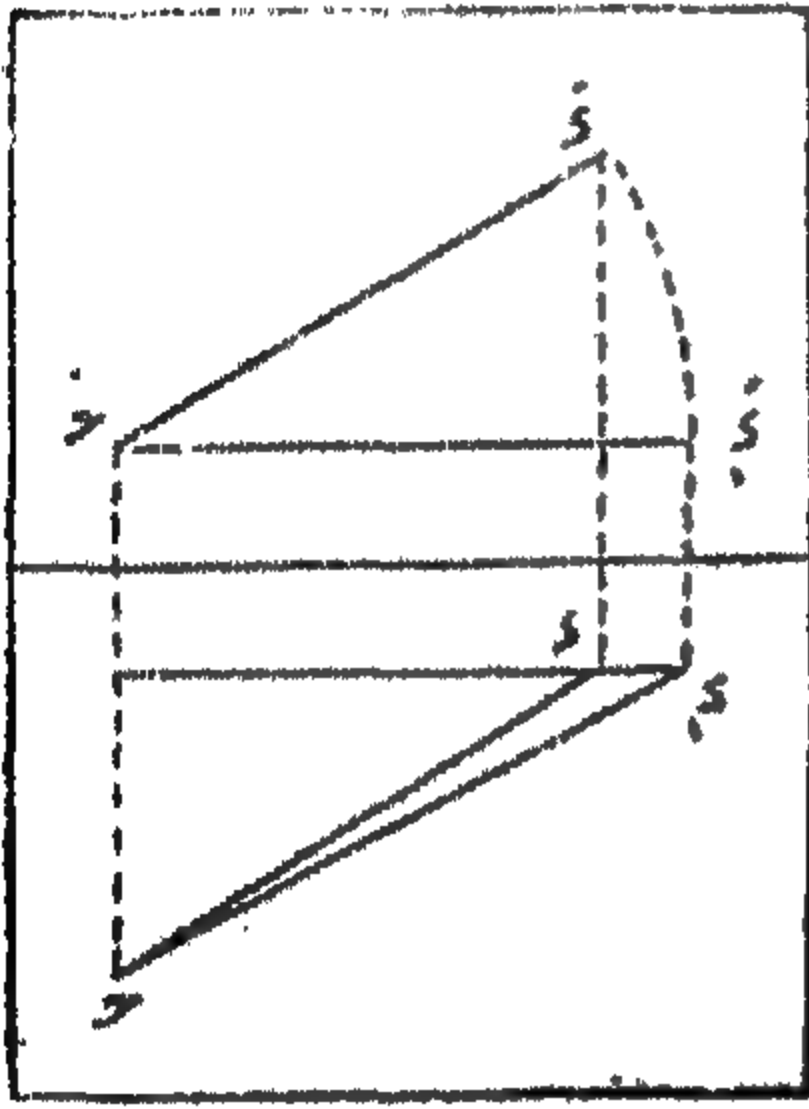
فاذا فرض ان  $ح د$  و  $د'$  هما مسقطا الخط  $ح د$  الافقى والرأسى على التوالى





( شكل ٣٨ )

شكل ( ٣٨ ) وركزنا في النقطة  $هـ$  وافتحة تساوي طول المسقط الاقنى  $هـ و$  ورسمنا قوسنا الى ان يكون هذا المسقط موازيا للمستوى الرأسى أو بعبارة أخرى موازيا لخط الأرض ومددنا من  $هـ$  خطا أفقيا واسقطنا من  $و$  العمود  $و١$  على خط الأرض فكانت نقطة  $د١$  هي المسقط الرأسى الجديد للنقطة  $و$  وكان  $هـ و١$  هو الطول الحقيقى للخط  $هـ و$  والزاوية  $\theta$  هي ميله على المستوى الافقى



( شكل ٣٩ )

وبنفس الطريقة يمكننا دوران المستقيم  $هـ و١$  الى أن يصير موازيا للمستوى الاقنى

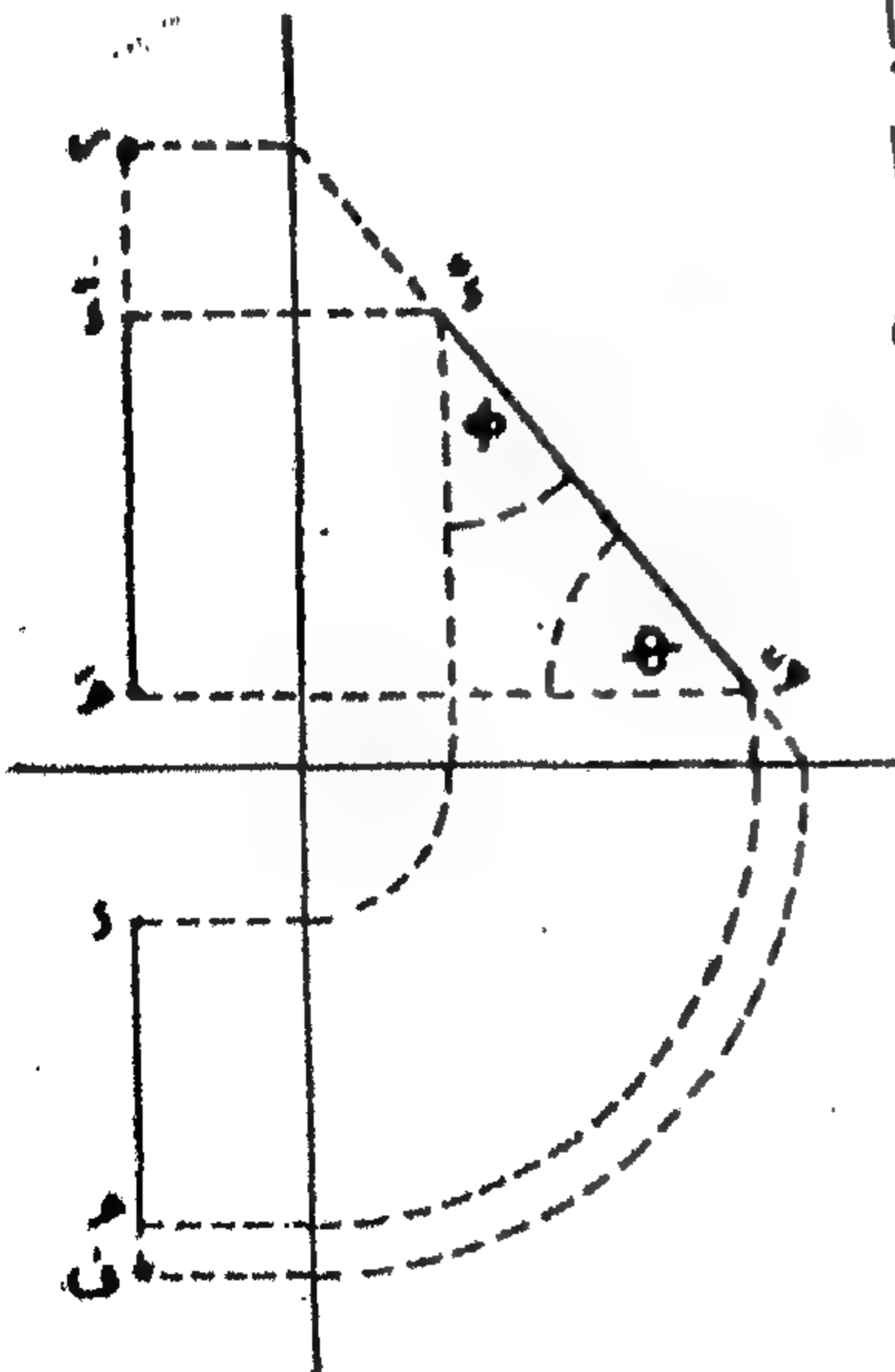
ففى شكل ( ٣٩ ) المفروض أن  $هـ و١$   $هـ و٢$  هما مسقطا الخط  $هـ و$  الاقنى والرأسى على التوالي فإذا ركزنا في النقطة  $هـ$  وافتحة تساوي طول المسقط الرأسى  $هـ و٢$  ورسمنا قوسا حتى يصبح هذا المسقط

موازيا للمستوى الاقنى أو بعبارة أخرى موازيا لخط الأرض ومددنا من  $هـ$  خطا أفقيا واسقطنا من  $و٢$  عمودا عليه  $و٢١$  فكانت نقطة  $د١$  هي المسقط الاقنى الجديد للنقطة  $و$  ويكون  $هـ و٢١$  هو الطول الحقيقى للخط  $هـ و٢$  هي زاوية ميله على المستوى الرأسى

أما اذا كان الخط عموديا على خط الأرض فيكون مسقطاه على مستقيم واحد عمودى على خط الأرض ولا يكفى ان اتعيين وضعه الحقيقى

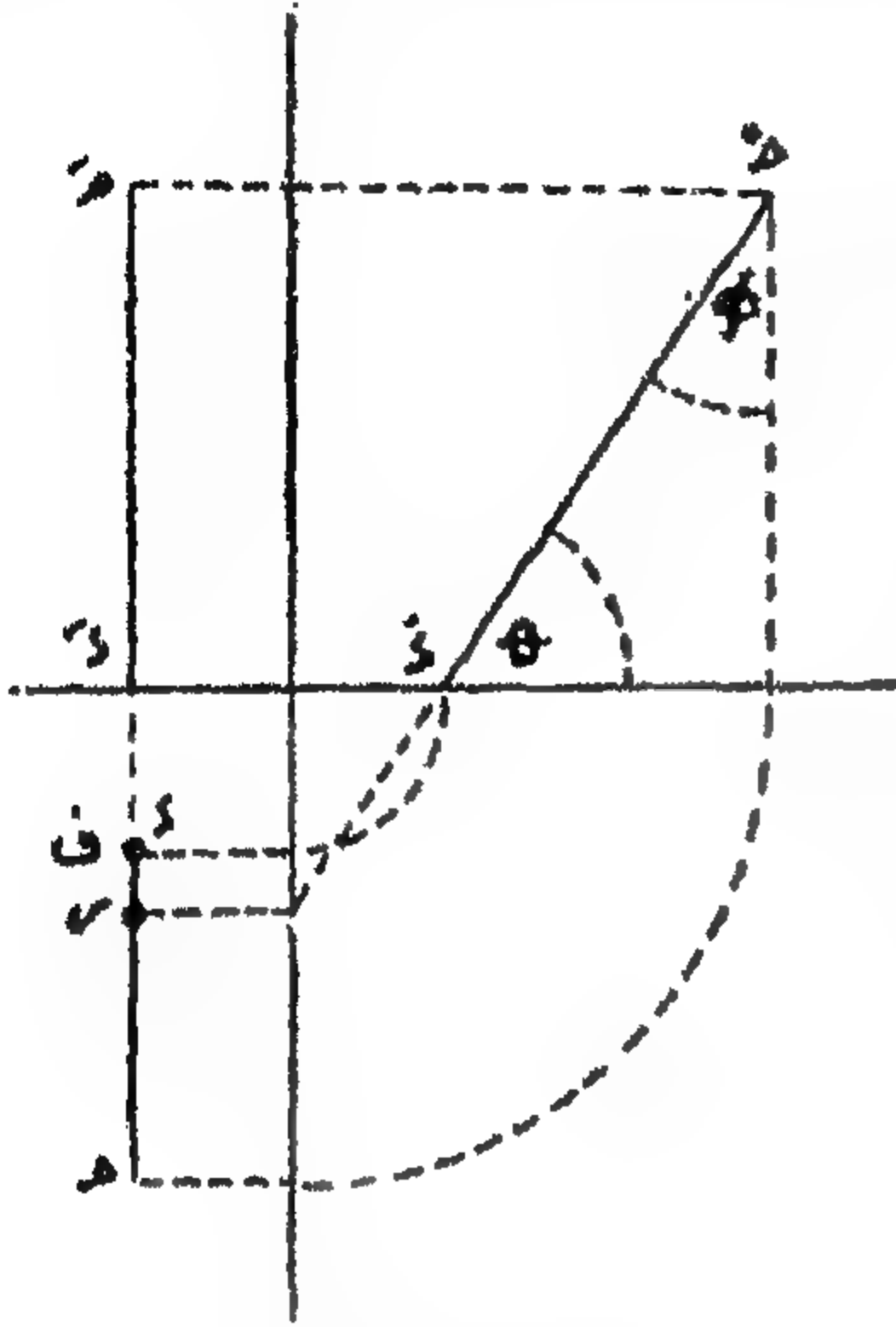
فلمعرفة وضعه الحقيقى يستعان بالمستوى

الجانبى فبايجاد المسقط الجانبى كما فى شكل ٤٠



( شكل ٤٠ )

٤١ للخط ح د تتعين زاويتا الميل  $\theta$  و  $\phi$  على الافقى وعلى الرأسى على التوالي وطوله الحقيقي ح د



( شكل ٤١ )

مسألة ٢ - إيجاد أثرى خط مستقيم

معلوم مسقطاه

حيث أن الاثر الرأسى لاي خط هو نقطة تلاقيه مع المستوى الرأسى فتكون هذه النقطة في المستوى الرأسى اذا يكون مسقطها الافقى على خط الارض لان بعدها عن المستوى الرأسى يساوى صفرا

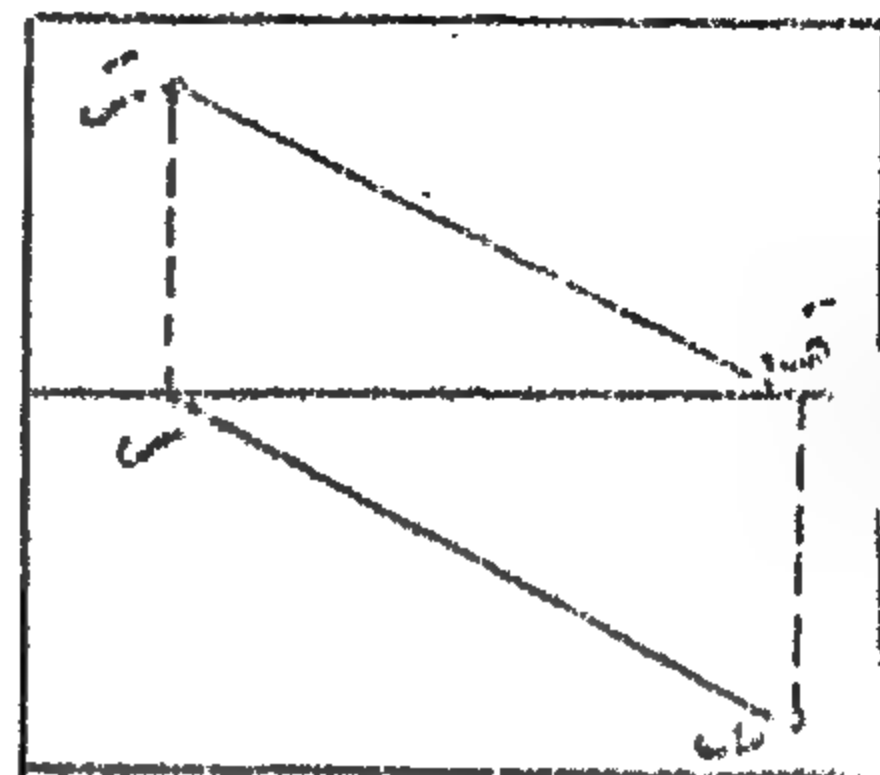
وكذا الاثر الافقى هو نقطة على المستوى

الافقى يكون مسقطها للرأسى على خط الارض

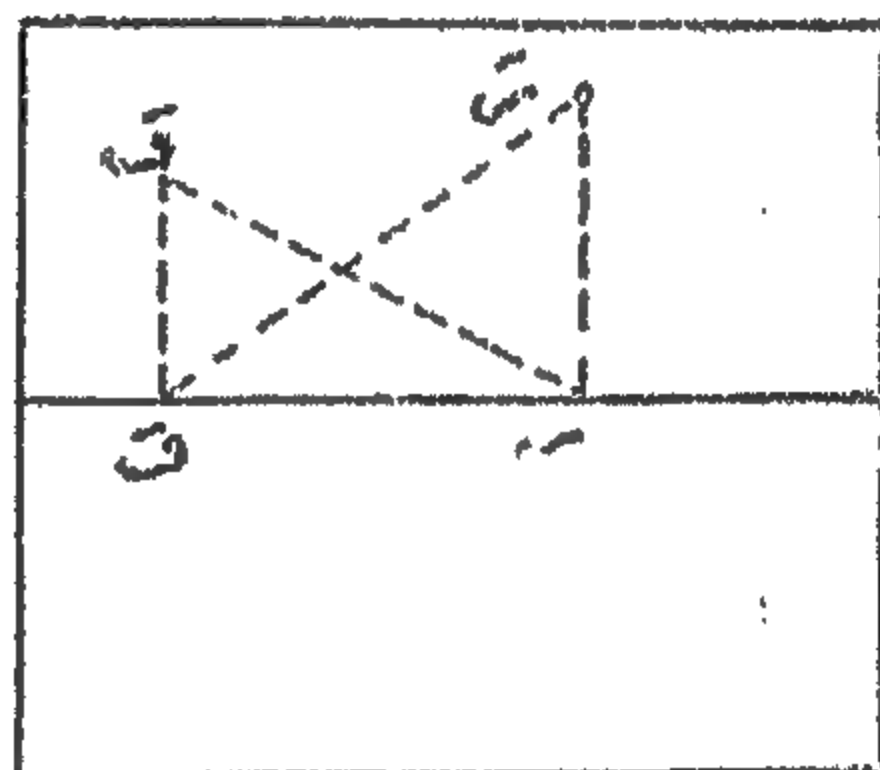
لان بعدها عن المستوى الافقى يساوى صفرا

صار حينئذ من السهل تعيين كل من الاثرين الافقى والرأسى لاي خط مستقيم فلايجاد ذلك نمد المسقط الرأسى الى ان يقابل خط الارض في نقطة تكون هي المسقط الرأسى للأثر الافقى فنرسم من هذه النقطة عمودا على خط الارض الى أن يلاقى المسقط الافقى أو امتداده في نقطة تكون هي الاثر الافقى للخط المذكور ولايجاد الاثر الرأسى نمد المسقط الافقى الى أن يقابل خط الارض في نقطة تكون هي المسقط الافقى للأثر الرأسى فنرسم من هذه النقطة عمودا على خط الارض الى أن يلاقى المسقط الرأسى أو امتداده في نقطة تكون هي الاثر الرأسى للخط المذكور ومن الاشكال المنظورة وغير المنظورة المجتمعة في الاشكال من نمرة ٤٢ الى نمرة ٤٥ وممثلة لوضع الخط المستقيم ا ب في الزوايا الاربع تظهر بسهولة طريقة إيجاد أثرى هذا الخط بمعلومية مسقطيه

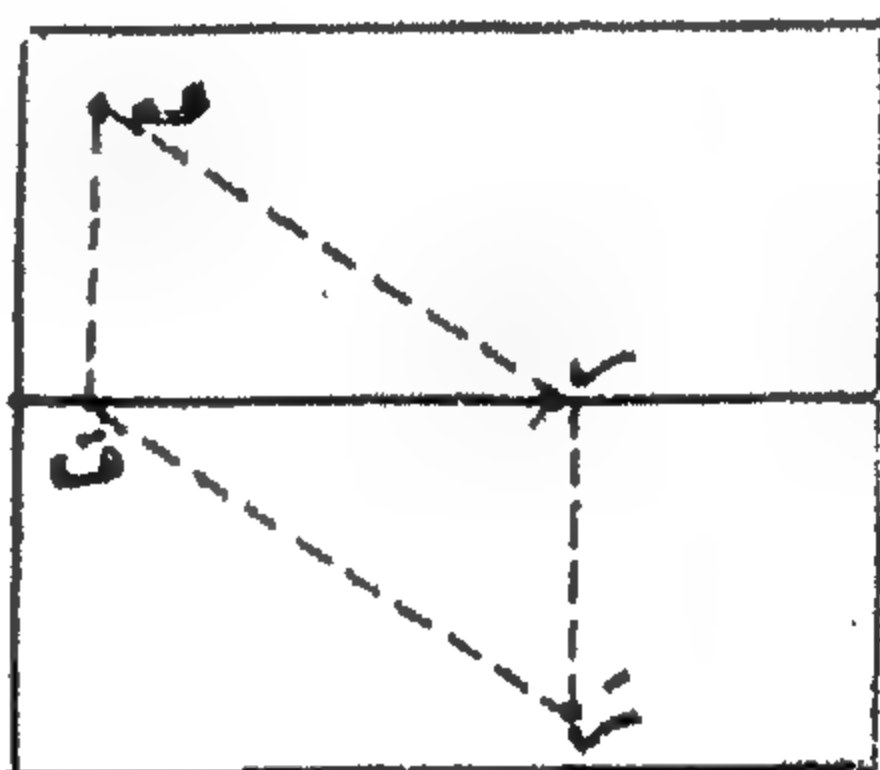
ملاحظة - بمعلومية أثرى خط مستقيم الرأسى والافقى مثل س و ف يمكن إيجاد مسقطيه وذلك بإيجاد المسقط الافقى للأثر الرأسى وهو س دلى خط الارض والمسقط



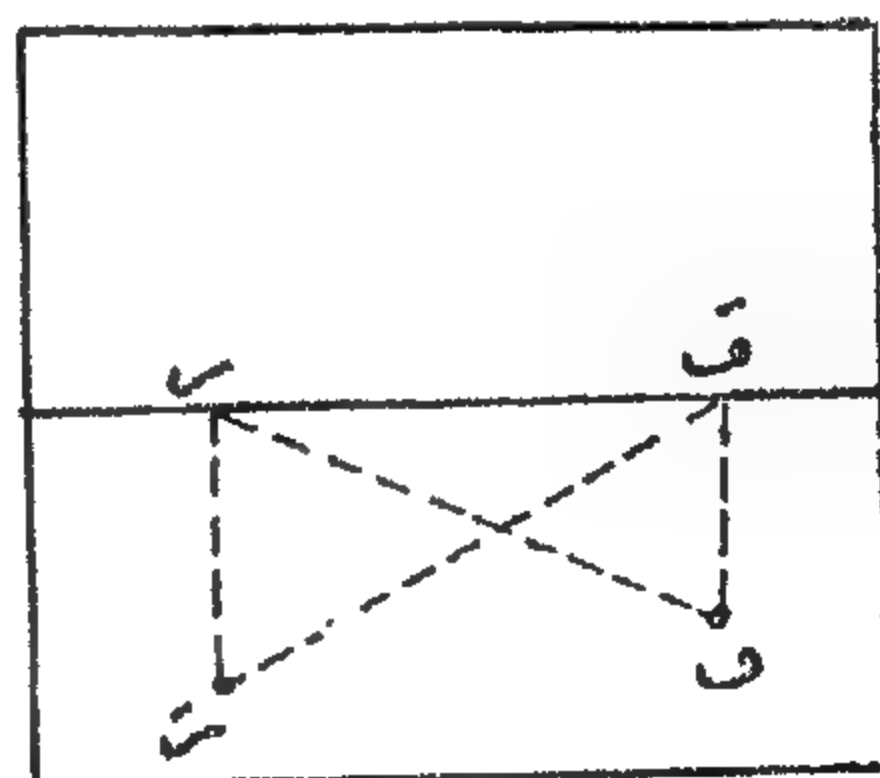
شکل  
(۴۲)



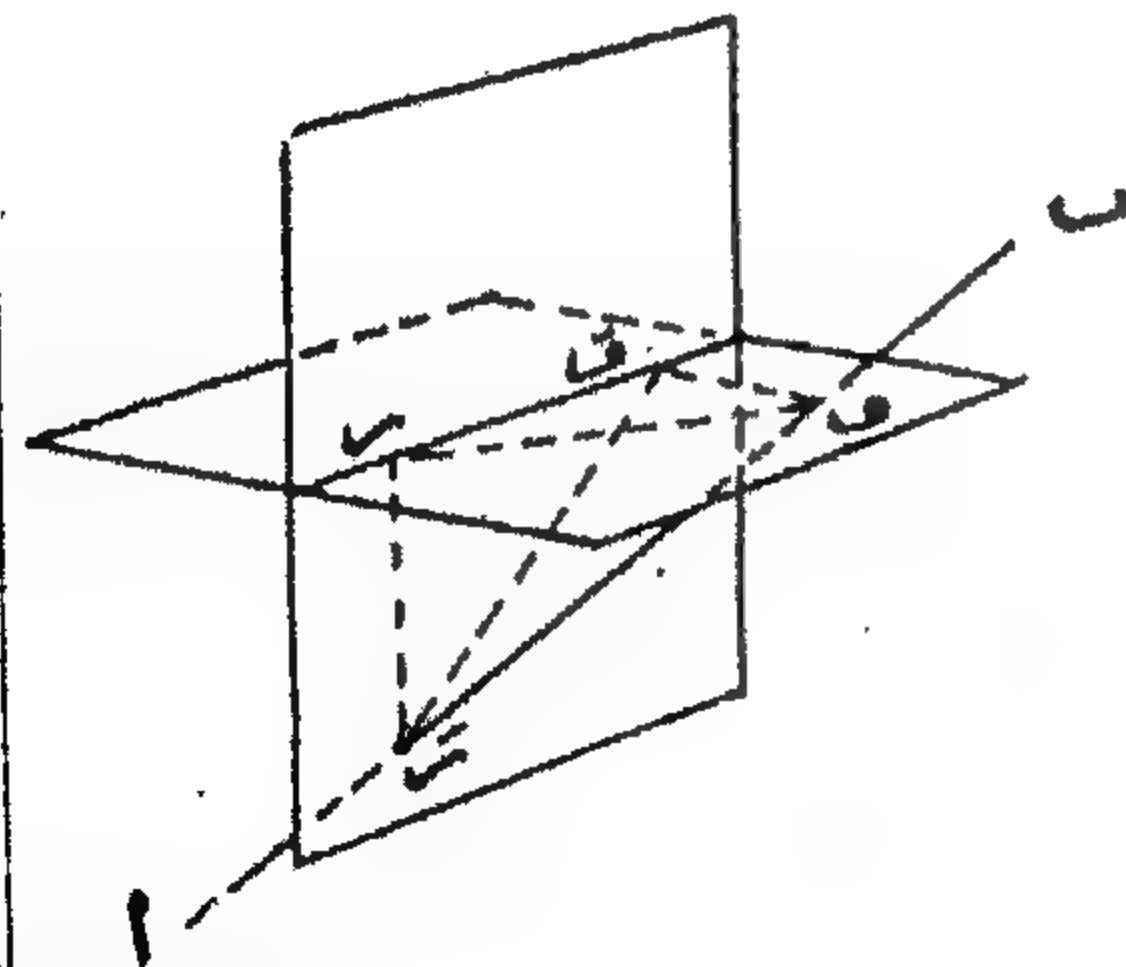
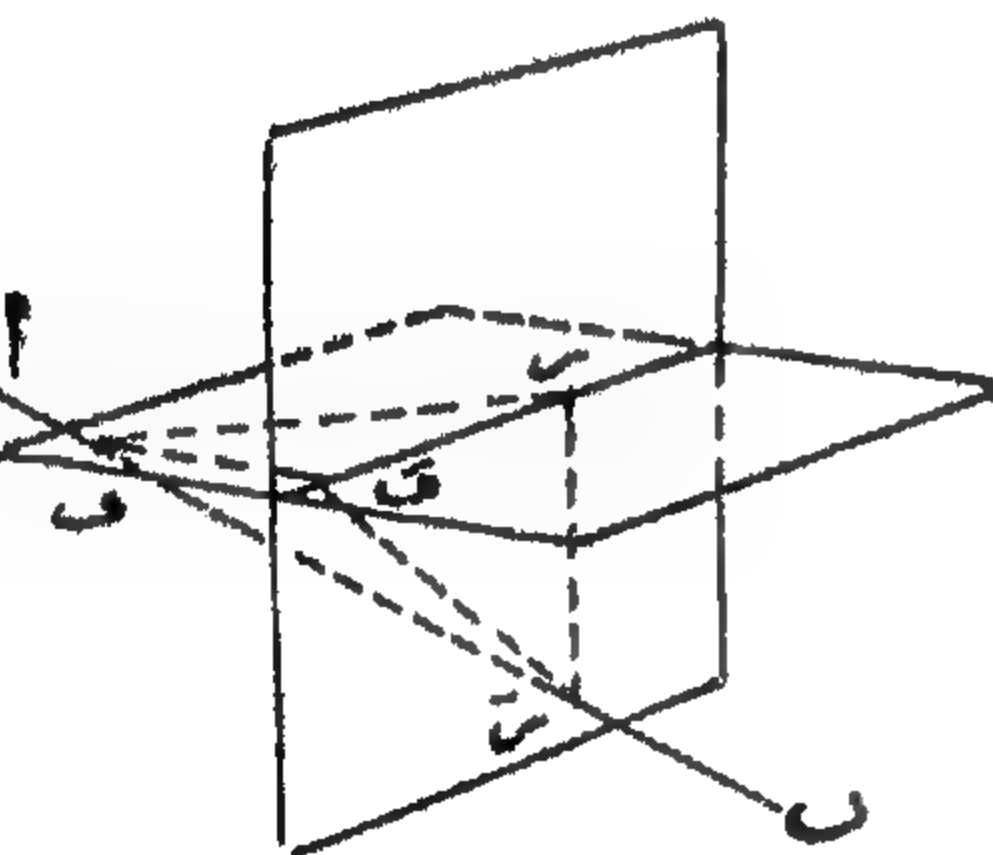
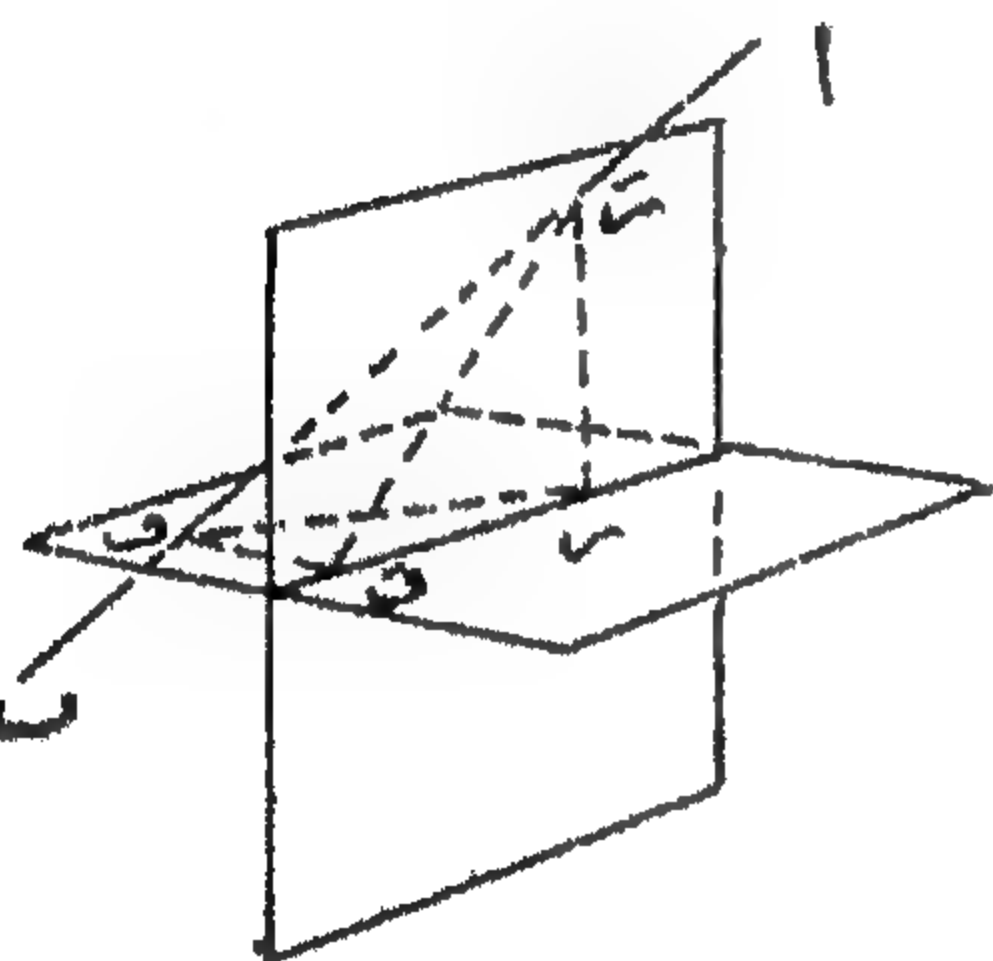
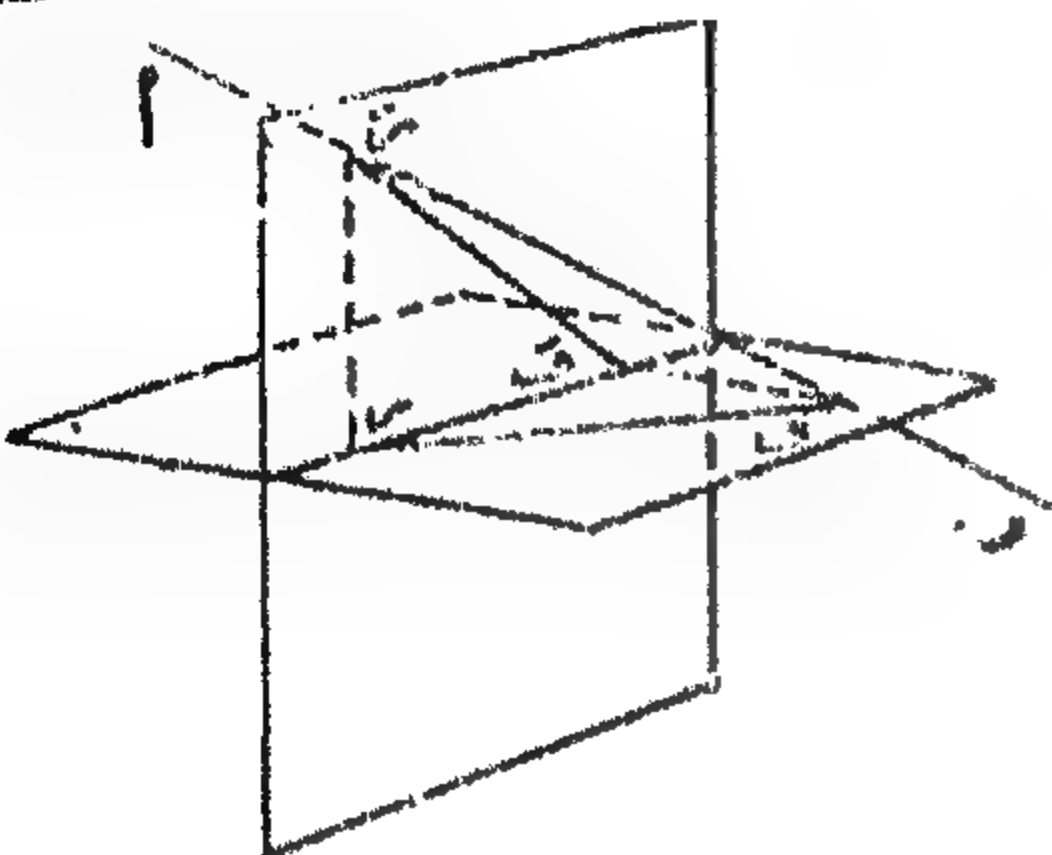
شکل  
(۴۳)



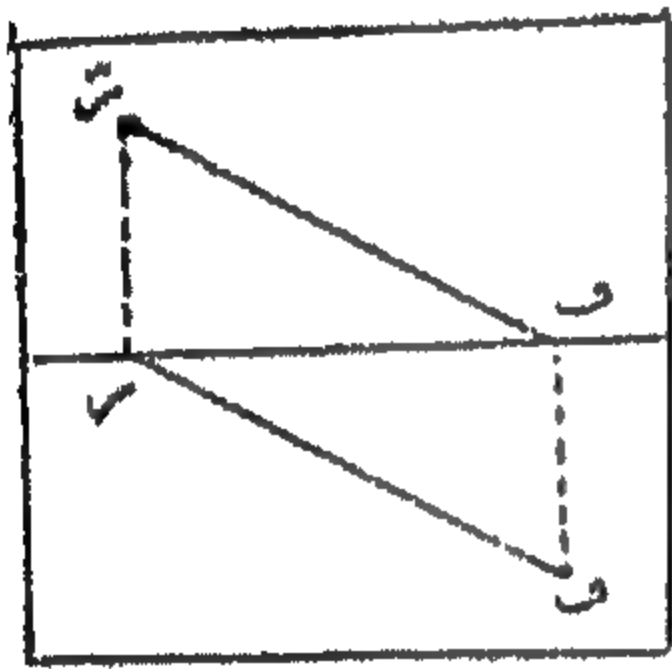
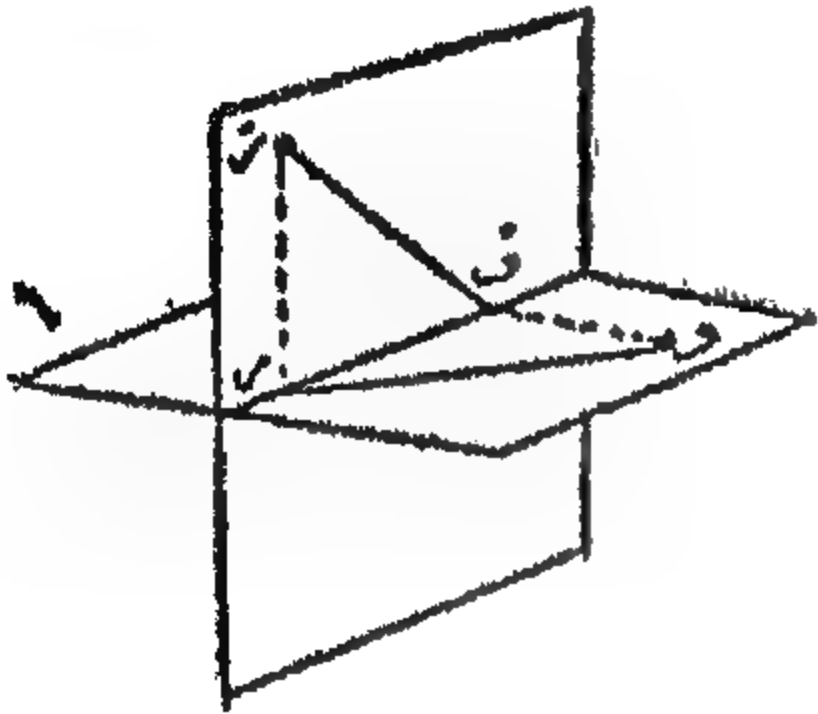
شکل  
(۴۴)



شکل  
(۴۵)



الرأسي للأثر الأفقي وهو  $F$  على خط الأرض فيكون  $F$  هو المسقط الرأسى للخط المذكور  $G$   $F$  هو المسقط الأفقى له كما هو مبين بشكل (٤٦)



(شكل ٤٦)

مسألة ٣ — معلوم مسقطا خط مستقيم الأفقى والرأسى والمطلوب تعيين نقطة عليها تبعد عن إحدى نهايتى المستقيم المعلوم ببعد معين

المفروض أن  $A$  و  $A'$  هما مسقطا الخط  $AB$

والمطلوب تعيين مسقطى نقطة مثل  $C$  عليه بحيث

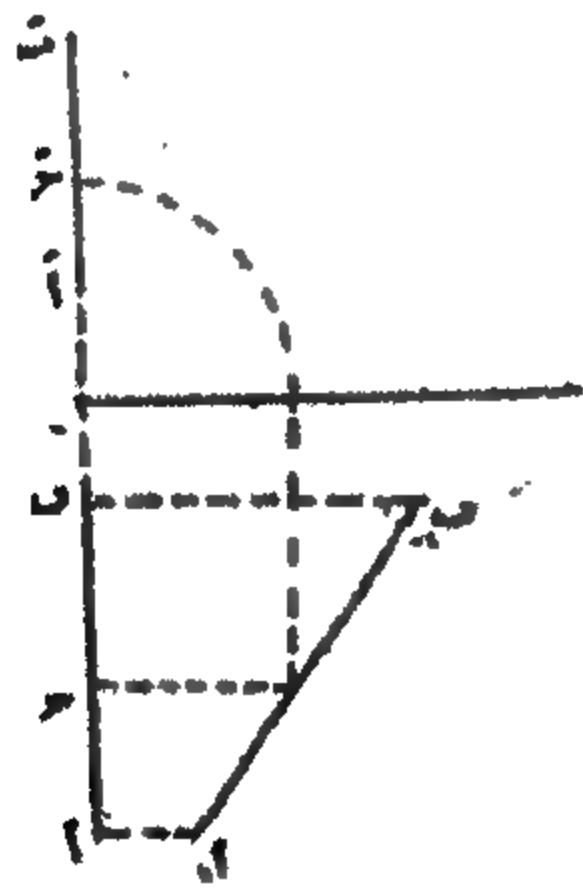
يكون بعدها عن نهايته  $A$  هو بعد معين شكلى ٤٧ و ٤٨

العمل نأخذ بالطول الحقيقى للخط  $AB$  بأحدى

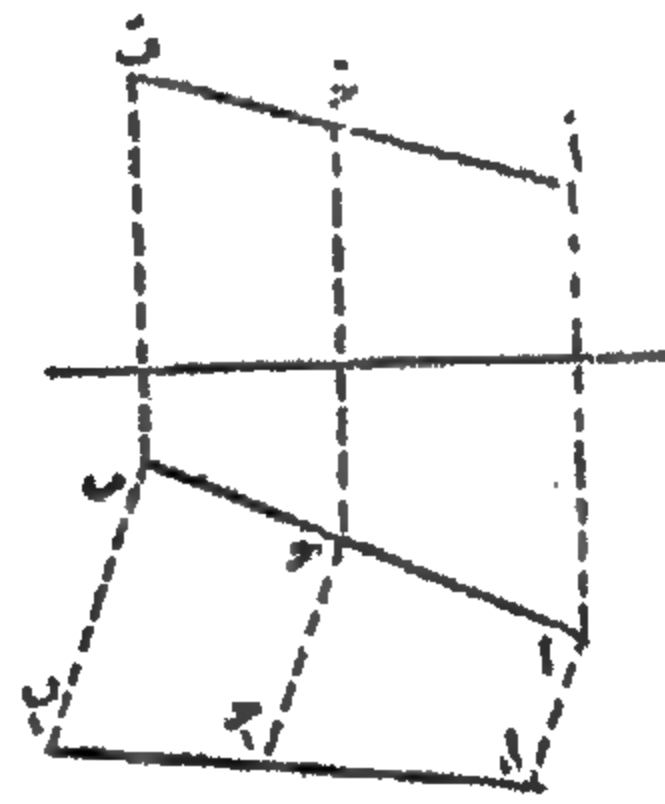
الطريقتين المعلومتين فى مسألة (١) ولتكن طريقة

الانطباق كما هو واضح فى الشكل وليكن  $A$   $B$  ثم نأخذ

على هذا الطول البعد المعين ابتداء من النقطة  $A$  وليكن  $C$  فتكون النقطة  $C$  هى حقيقة النقطة  $C$  بعد الانطباق



(شكل ٤٨)



(شكل ٤٧)

فإذا رسمنا من  $C$  عمودا على  $AA'$  مثل  $C$  تكون نقطة  $C$  هى المسقط الأفقى

لنقطة  $C$  وتكون  $C$  على  $AA'$  هى مسقطها الرأسى

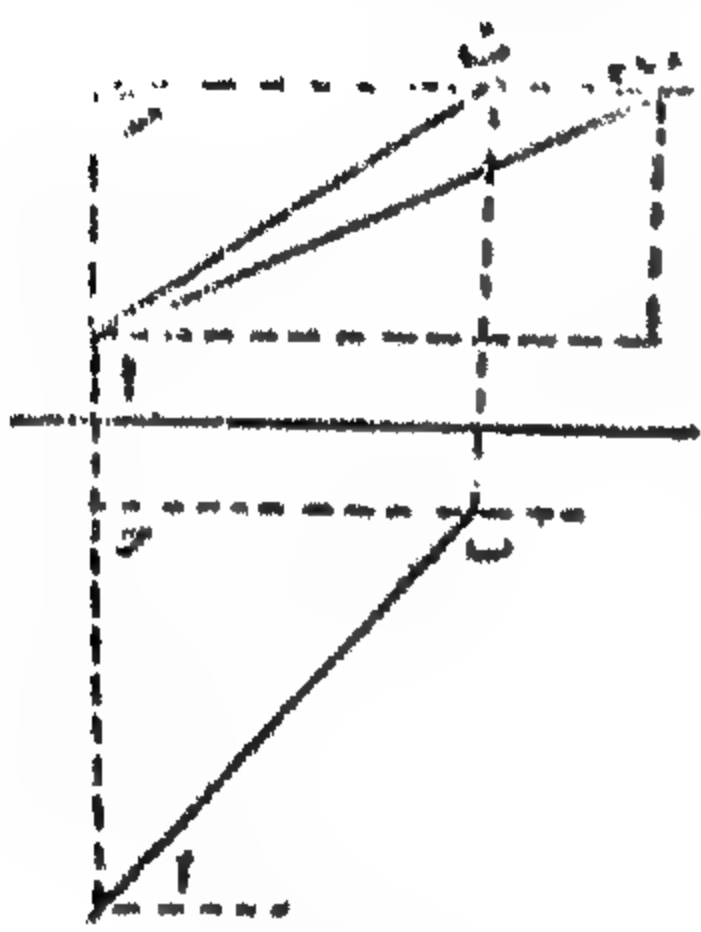
ملاحظة — (الشكل ٤٧) يبين مسقطى مستقيم أيا كان (مائل على مستوئى

المسقط) (والشكل ٤٨) يبين حالة خاصة له وهو عمود على خط الأرض وفيها يكون

مسقطا المستقيم  $AB$  عموديين على خط الأرض

مسألة ٤ - معلوم الطول الحقيقي لخط مستقيم وبعدا كل من نهايتيه عن كل من مستوي المسقط والمطوب رسم مسقطيه الافقى والرأسي

المفروضه : أن  $AB$  ( شكل ٤٩ ) هما المسقطان الافقى والرأسي للنقطة  $A$  احدي



شكل ( ٤٩ )

نهايتي الخط المفروض  $AB$  وان المسقط الافقى لنهايته  $B$  يقع على المستقيم  $B'$  الموازي لخط الارض ويبعد عنه ببعد النقطة  $B$  عن المستوى الرأسي ومسقطها الرأسي على المستقيم  $B''$  الموازي لخط الارض ويبعد عنه ببعد النقطة  $B$  عن المستوى الافقى

العمل - نركز في نقطة  $A'$  ويبعد يساوي  $AA''$  وهو

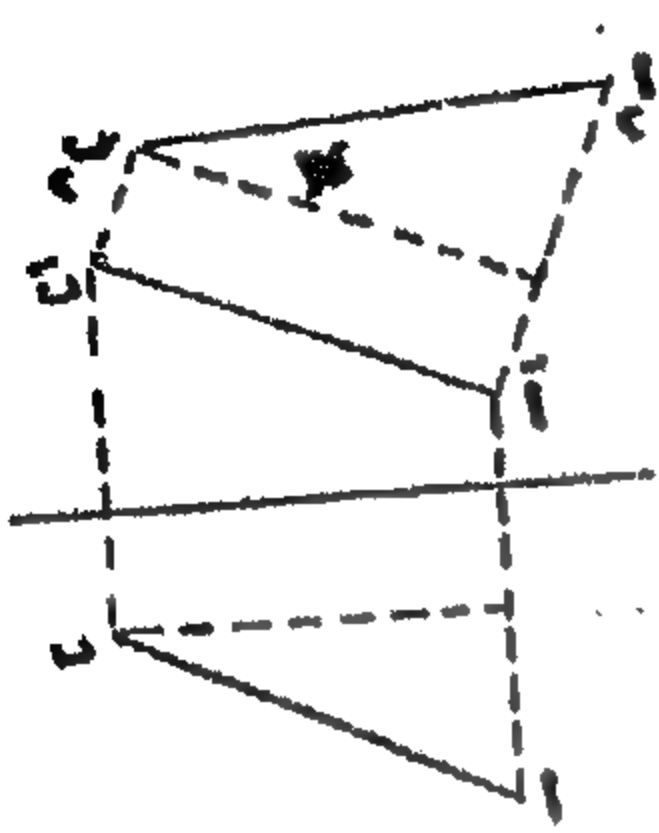
الطول الحقيقي للمستقيم المفروض  $AB$  ونرسم قوساً يقطع المستقيم  $B'A'$  في نقطة  $B'$  ونصل  $AB'$  فيمكننا اعتبار الخط  $AB'$  هو المسقط الرأسي للمستقيم  $AB$  بفرض انه دارووازي للمستوى الرأسي وعلى هذا يكون الطول  $B'A'$  هو طول المسقط الافقى له قبل الدوران وبعده فاذا ركزنا في  $A'$  وبطول يساوي المسقط الافقى  $B'A'$  ورسمنا قوساً يقطع الخط  $B'A'$  في نقطة  $B''$  تكون النقطة  $B''$  هي المسقط الافقى لنهاية الخط  $AB$  ويكون  $AB''$  هو المسقط الافقى له .

وحيث أن المسقط الرأسي للنقطة  $B$  واقع على  $B'A'$  فنرسم من  $B''$  عموداً على خط الارض ونعده حتى يلاقى  $B'A'$  في نقطة  $B'$  تكون هي المسقط الرأسي للنقطة  $B$  ويكون  $AB'$  هو المسقط الرأسي للخط  $AB$  وهو المطلوب

مسألة ٥ - المعلوم مسقط خط مستقيم على أحد مستويي المسقط وزاوية ميله على هذا المستوى وبعد نقطة منه عن نفس المستوى والمطلوب إيجاد مسقطه الآخر المفروضه : المسقط الرأسي للخط  $AB$  وليكن  $A'B'$  وميل هذا الخط على المستوى الرأسي وليكن زاوية  $\theta$  وبعد النقطة  $B$  منه عن المستوى الرأسي أيضاً ( أرى بمعنى آخر معلوم المسقط الافقى للنقطة  $B$  وهو )



## والمطلوب رسم مسقطه الافقى (شكل ٥٠)



(شكل ٥٠)

العمل - حيث أنه اذا تصورنا دوران المستقيم  $AB$  في الفراغ حول مسقطه الرأسى  $A'$  الى أن ينطبق على المستوى الرأسى فيكون هو واحدائى نهايتيه شبه منحرف  $A'B'$  ويكون  $A'B'$  هو طوله الحقيقى والبعد  $B'A'$  هو بعد النقطة  $B$  عن المستوى الرأسى ويكون  $A'A$  هو بعد النقطة  $A$  عن المستوى الرأسى ويكون ميل  $A'B'$  على المسقط الرأسى  $A'$  يساوى ميله على المستوى الرأسى  $\Phi$

إذا نرسم من  $B'$  عموداً على  $A'A$  ونأخذ عليه بعد النقطة  $B$  عن المستوى الرأسى وليكن  $C$  ومن  $A'$  عموداً على  $A'A$  أيضاً ثم نرسم خطاً من  $C$  يميل على  $A'A$  بالزاوية  $\Phi$  الى أن يقابل العمود من  $A'$  نقطة  $A''$  يكون  $A''$  هو طول الخط الحقيقى ويكون  $A''A'$  هو بعد النقطة  $A$  عن المستوى الرأسى

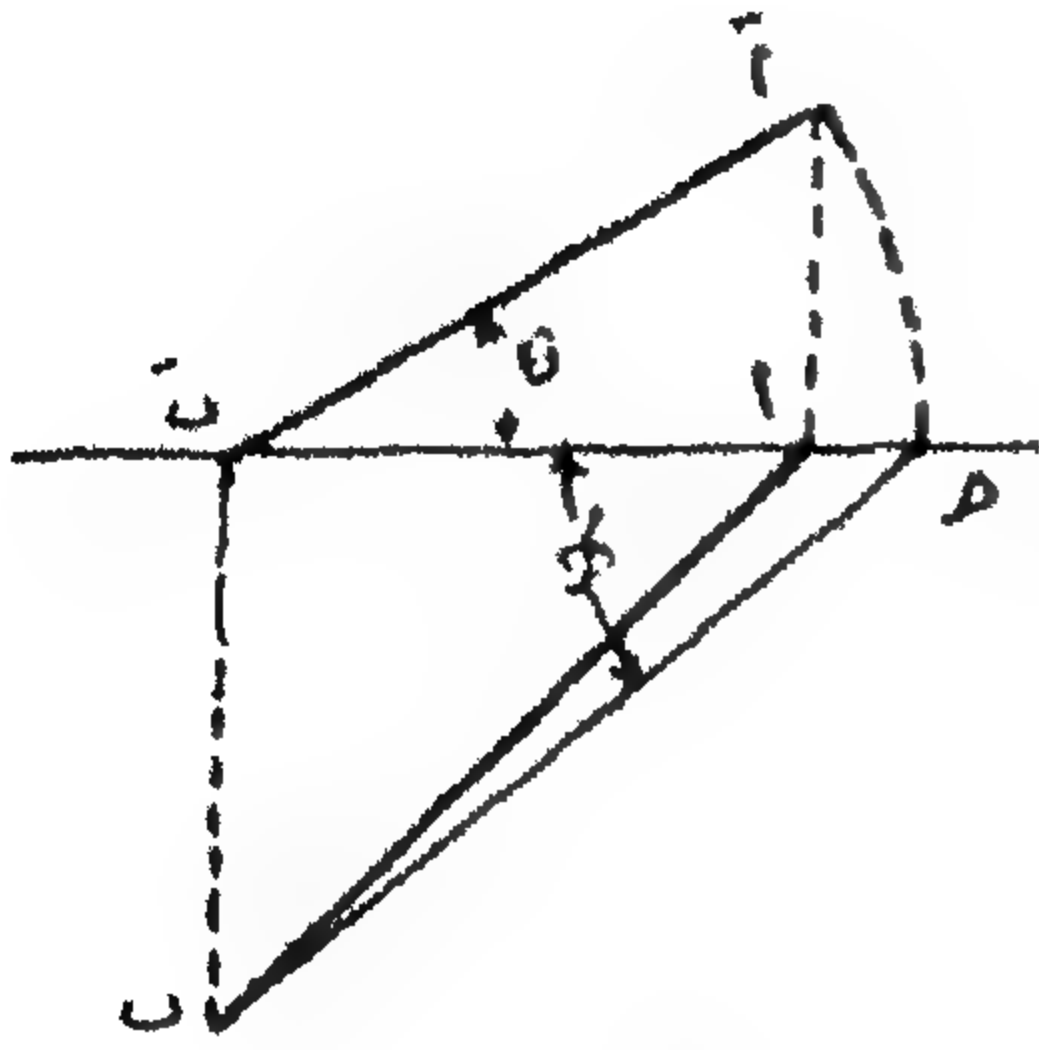
فإذا رسمنا عموداً من  $A''$  على خط الارض وأخذنا عليه بعداً يساوى  $A'A$  تحت خط الارض الى  $A$  ينتج أن النقطة  $A$  هى المسقط الافقى للنقطة  $A$  ويكون  $AB$  هو المسقط الافقى للخط  $AB$  وهو المطلوب

ملاحظة - يمكن حل المسألة بنفس الطريقة اذا علم المسقط الافقى وميل المستقيم على الافقى وبعد نقطة منه عن المستوى الافقى أيضاً ونترك للطالب عملها بنفسه

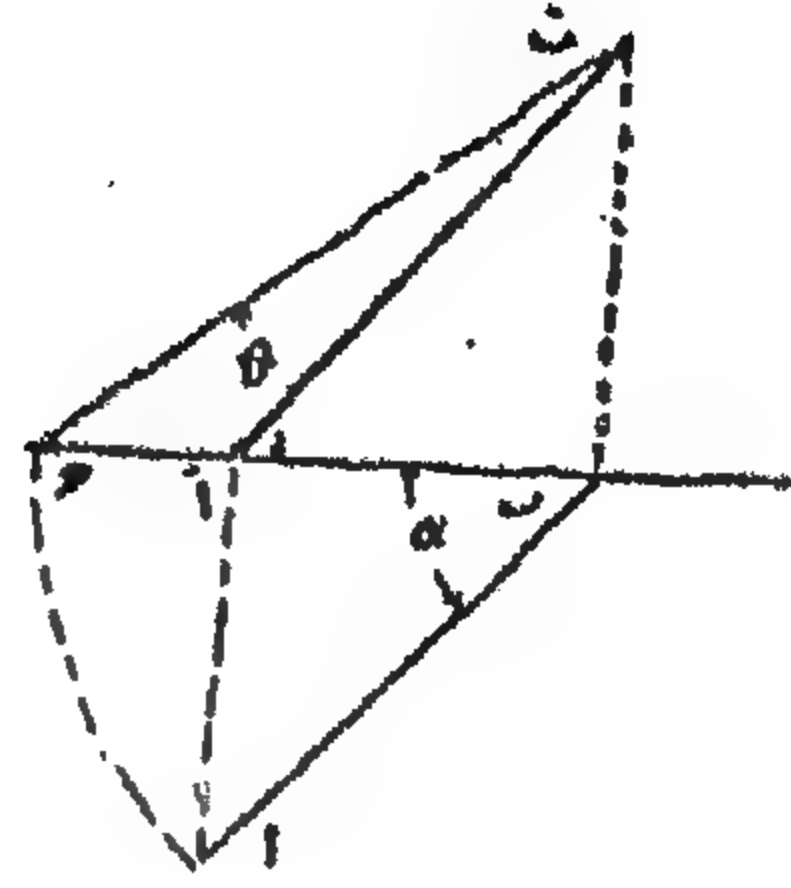
مسألة ٦ - معلوم ميل خط مستقيم على أحد مستويي المسقط والزاوية التى يصنعها مسقطه على هذا المستوى مع خط الارض والمطلوب رسم مسقطيه

المفروض : المسقط الافقى  $AB$  للخط  $AB$  في الفراغ وميله  $\Phi$  مع المستوى الافقى مع خط الارض (شكل ٥١) وميل مسقطه الافقى مع خط الارض «

والمطلوب رسم مسقطه الرأسى



شكل ( ٥٢ )



شكل ( ٥١ )

العمل - اذا تصورنا دوران الخط  $AB$  الى أن يوازي المستوى الرأسى وكانت نقطة  $B$  منه ثابتة ونقطة  $A$  هي المتحركة فقط وحافضة لبعدها عن المستوى الأفقى فإنه لا يتغير طول المسقط الأفقى ويكون بعد الدوران موازيا لخط الأرض أو منطبقا عليه في حالة وجود النقطة  $A$  على المستوى الأفقى كما بالشكل (٥١)

فاذا فرضنا أن  $A$  على المستوى الأفقى يكون المسقط الرأسى لها بعد الدوران هو النقطة  $B$  فاذا ركزنا في  $B$  وبطول يساوى المسقط الأفقى المفروض  $AB$  ورسمنا قوساً يقطع الخط الموازى لخط الأرض من  $B$  في  $C$  - كان  $C$  هو المسقط الأفقى للخط  $AB$  بعد الدوران واذا أقمنا عموداً من  $C$  على خط الأرض كانت  $A'$  أو المسقط الرأسى للنقطة  $B$  واقعة عليه واذا رسمنا خطاً من النقطة  $C$  يميل مع خط الأرض بالزاوية  $\theta$  وهي ميل الخط مع المستوى الأفقى وليكن  $C'$  لقابل العمود من  $C$  على خط الأرض في  $C'$  كان  $C'$  هو المسقط الرأسى للخط  $AB$  بعد الدوران

وحيث أن النقطة  $A$  عند ما تحركت كان مسقطها الرأسى يتحرك على خط أفقى لأنها حافضة لبعدها عن المستوى الأفقى فيكون مسقطها الرأسى قبل الدوران على الخط المرسوم من  $C$  موازيا لخط الأرض فاذا رسمنا عموداً من  $A$  على خط الأرض ليقابل الخط  $C$  في  $A'$  كانت  $A'$  هي المسقط الرأسى للنقطة  $A$  قبل الدوران وكان  $A'$  هو المسقط الرأسى للخط  $AB$  وهو المطلوب

ملاحظة ١ - يمكن الطالب الاستعانة على فهم العملية السابقة بالنظر الى المنظور ( شكل ٥٣ وفيه  $C$  هو المسقط الأفقى للخط  $AB$  بعد الدوران و  $C'$  المسقط الرأسى



زاوية ميله مع المستوى الرأسى وطول مسقطه الرأسى بعد الدوران هو عين طول مسقطه الرأسى قبل الدوران

ومن ذلك اذا فرضنا أنه انتخبت النقطة  $\delta$  في المنظور (شكل ٥٣) لان تكون مسقطا رأسيا للنقطة  $\alpha$  في الفراغ بعد دوران  $\alpha$  ب حتى وازى المستوى الرأسى ورسمنا منها  $\delta$  مستقيما يساوى في الطول  $\alpha$  ب ويميل بزاوية ميله مع المستوى الافقى  $\theta$  يكون  $\beta$  هو المسقط الرأسى للخط  $\alpha$  بعد الدوران ويكون احداثى  $\beta$   $\delta$  الافقى هو طول المسقط الافقى لنفس الخط بعد الدوران وهو عينه طول مسقطه الافقى قبل الدوران حينئذ قد علم لنا طول المسقط الافقى للخط  $\alpha$  ب

وبمثل هذه الطريقة يمكننا رسم مثلث مثل  $\beta$   $\delta$   $\gamma$  يكون فيه  $\beta$   $\delta$  الطول الحقيقى للخط  $\alpha$  ب ونعتبره طول مسقطه الافقى اذا دار المستقيم  $\alpha$  ب حتى وازى المستوى الافقى وفيه أيضا  $\gamma$   $\delta$  خط يميل بالزاوية  $\theta$  وهى ميل الخط  $\alpha$  ب على الرأسى والزاوية  $\beta$   $\gamma$  قائمة وبمعنى آخر قد اعتبرنا أن  $\gamma$   $\delta$  يمثل طول المسقط الرأسى للخط  $\alpha$  ب قبل الدوران وبعده

فلايجاد مسقطى الخط (شكل ٥٤) نلتخب نقطة مثل  $\delta$  (  $\delta$   $\delta$  ) لتمثل مسقطى النقطة  $\alpha$  بعد دوران الخط  $\alpha$  ب حتى وازى المستوى الرأسى ونرسم من  $\delta$   $\delta$  الخط  $\delta$   $\beta$  يميل بزاوية  $\theta$  مع خط الارض ثم نأخذ عليه الطول  $\delta$   $\beta$  يساوى الطول الحقيقى للخط  $\alpha$  ب فيكون  $\delta$   $\beta$  هو المسقط الرأسى بعد الدوران ويكون  $\delta$   $\delta$  هو المسقط الافقى بعد الدوران

فاذا ركزنا فى  $\delta$  وبطول المسقط الافقى ورسمنا قوسا  $\delta$   $\alpha$  فلا بد أن هذا القوس هو المحل الهندسى للمسقط الأفقى للنقطة  $\alpha$  أثناء الدوران . بعد ذلك اذا رسمنا من  $\delta$  خط  $\delta$   $\gamma$  يميل بزاوية  $\theta$  مع  $\delta$   $\beta$  وليكن  $\delta$   $\gamma$  وأنزلنا من  $\delta$  عمودا عليه وليكن  $\delta$   $\delta$  لا يمكن اعتبار  $\delta$   $\delta$  طول المسقط الرأسى بعد دوران الخط حتى وازى المستوى الافقى وأن الخط  $\delta$   $\gamma$  هو طول مسقطه الرأسى قبل الدوران

فاذا ركزنا فى  $\delta$  وبطول يساوى المسقط الرأسى  $\delta$   $\gamma$  ورسمنا قوسا ليقطع الخط  $\delta$   $\alpha$  الموازى لخط الارض فى  $\alpha$  فكانت  $\alpha$  هى المسقط الرأسى للنقطة  $\alpha$  قبل دوران

المستقيم وموازاته للمستوى الرأسى لأنها على خط أفقى مع  $ح$  ولأن الطول  $ح$   $آ$  هو طول المسقط الرأسى قبل الدوران ولا بد أن يكون المسقط الاقنى للنقطة  $ا$  على خط عمودى على خط الارض مرسوم من  $آ$  فنرسم  $آا$  عموداً على خط الارض .

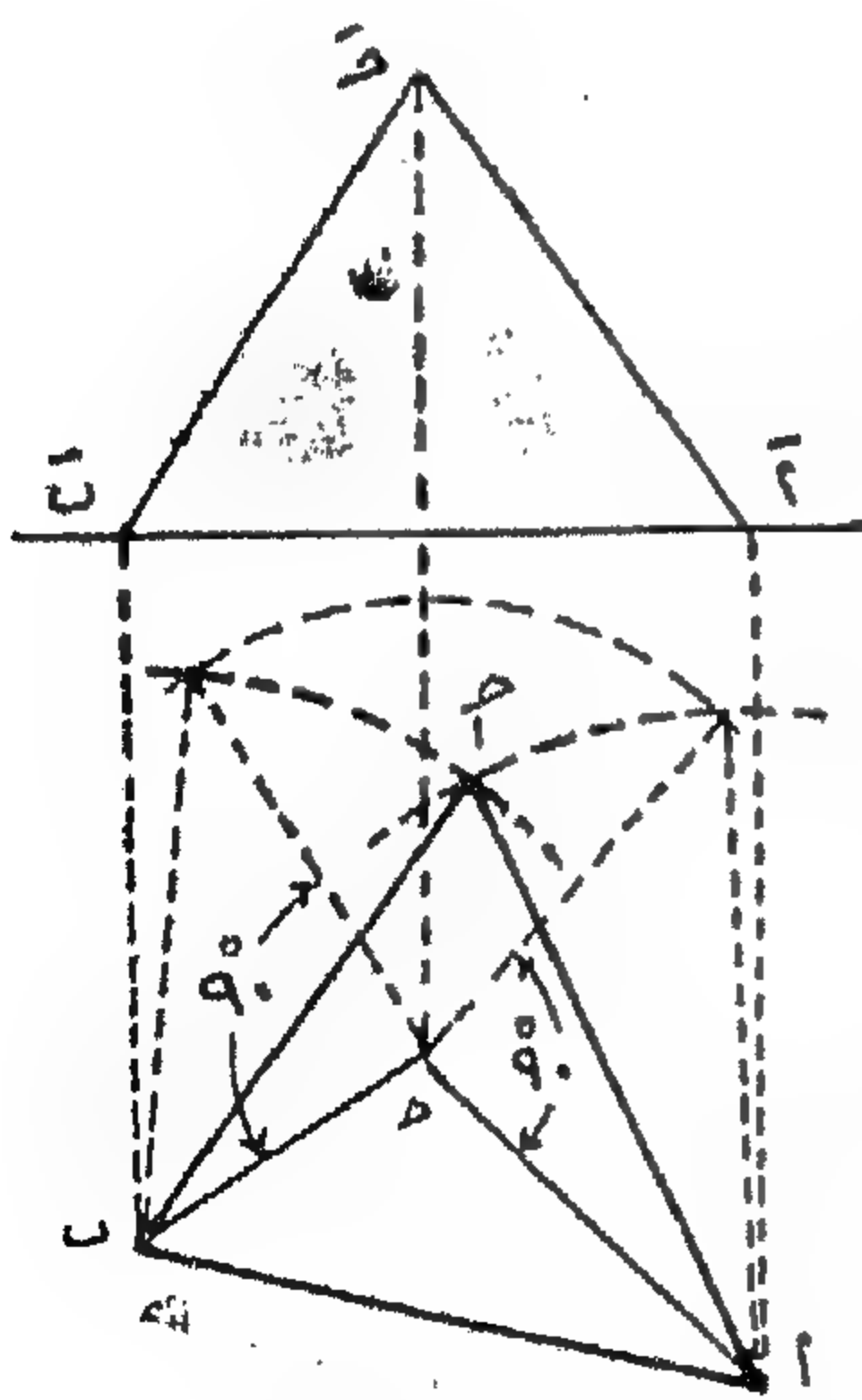
وحيث أننا أثبتنا أن القوس  $ح$   $ا$  هو المحل الهندسى للمسقط الاقنى للنقطة  $ا$  تكون نقطة تقاطع العمود مع القوس وهى  $ا$  هى المسقط الاقنى للنقطة  $ا$

ويكون  $ا$   $ب$  هو المسقط الاقنى و  $ا$   $ب$  هو المسقط الرأسى للخط  $ا$   $ب$  وهو المطلوب

مسألة ٨ — إيجاد الشكل الحقيقى لأى سطح مستو بمعلومية مسقطيه

مسقط أى سطح مستو على أى مستوى لا يبين أبعاده أو شكله الحقيقى الا اذا وزاى هذا السطح المستوى المستقرط عليه ففى هذه الحالة فقط يكون السطح ومسقطه واحدا .  
فلبيان الشكل الحقيقى لأى سطح مستوى معلوم مسقطاه من الضرورى إيجاد المسافات الحقيقية لعدد كاف من نقطه بالنسبة لبعضها وتلك المسافات يمكننا إيجادها باحدى الطريقتين السابق ذكرهما فى (مسألة ١)

فمثلا ليكن المفروض مسقطا المثلث  $ا$   $ب$   $ح$  فى الفراغ وليكن  $ا$   $ب$   $ح$  هو مسقطه الاقنى و  $ا$   $ب$   $ح$  هو مسقطه الرأسى على التوالى (شكل ٥٥)



شكل ( ٥٥ )

والمطلوب إيجاد الشكل الحقيقى لهذا المثلث

العمل : — نجد المسافات الحقيقية بين النقط

الثلاثة  $ا$   $ب$   $ح$  فى الفراغ وبمعنى آخر نجد الطول الحقيقى لاضلاعه الثلاثة  $ا$   $ب$   $ح$  و  $ا$   $ح$  و  $ا$   $ب$  بمعلومية مسقطى كل منها باحدى الطريقتين السابق ذكرهما ولتكن طريقة الانطباق كما هو مبين بالشكل فالمستقيم  $ح$   $ا$  هو الطول الحقيقى للضلع  $ح$   $ا$  والمستقيم  $ب$   $ح$  هو الطول الحقيقى للضلع  $ب$   $ح$  والمستقيم  $ا$   $ب$  هو الطول الحقيقى للضلع  $ا$   $ب$

وبذلك يمكننا رسم المثلث الحقيقى  $ا$   $ب$   $ح$

المرسوم فى الشكل وهو الشكل الحقيقى المطلوب



**ملاحظة (١) :** — اذا تكون السطح من اكثر من ثلاث أضلاع فيمكن تقسيمه الى مثلثات وبإيجاد الاشكال الحقيقية لاضلاع تلك المثلثات يمكن تعيين الشكل الحقيقي للسطح كله

**ملاحظة (٢) :** — يستحسن لايجاد الشكل الحقيقي لأي سطح معلوم إسقاطه استعمال طريقة دوران المستوى المحتوى عليه هذا الشكل الى ان ينطبق أو يوازي أحد مستويي المسقط وسيأتي الكلام على ذلك فيما بعد عند الكلام على دوران المستويات

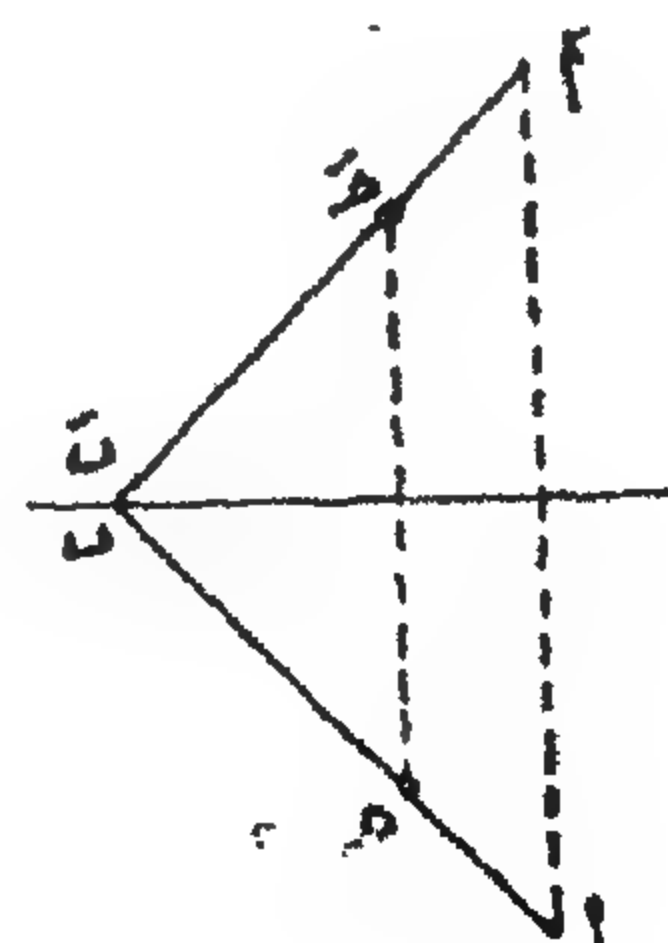
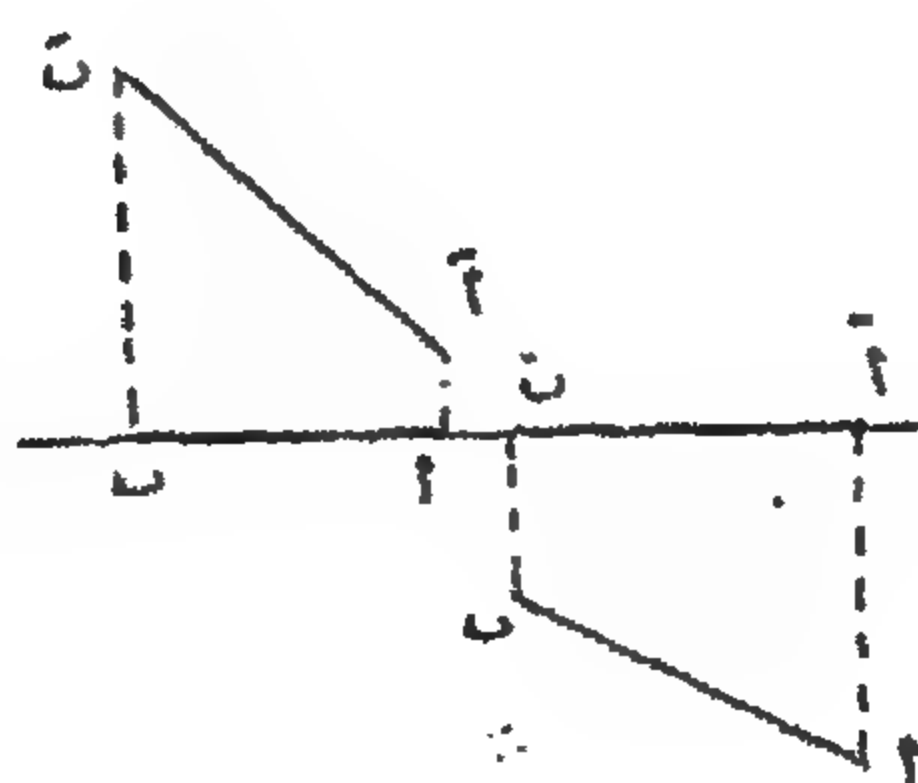
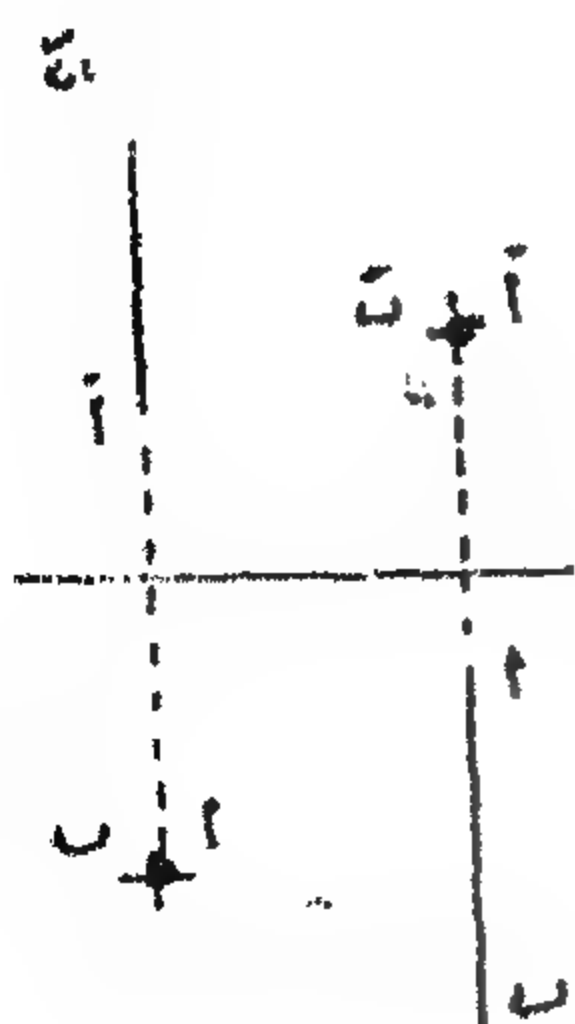
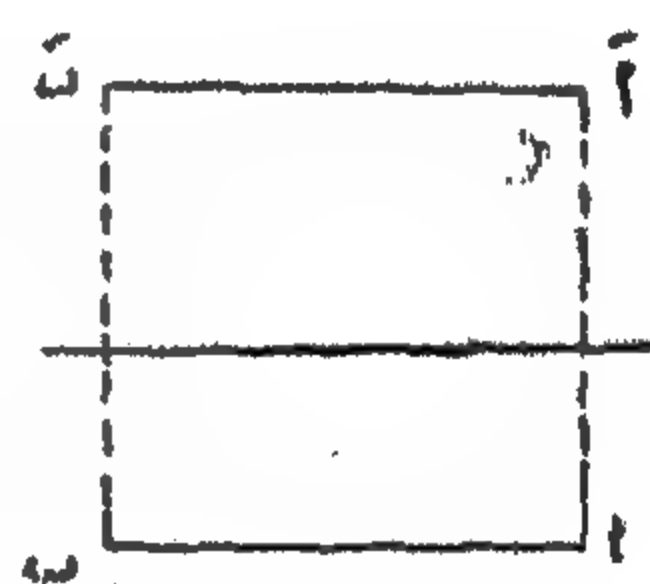
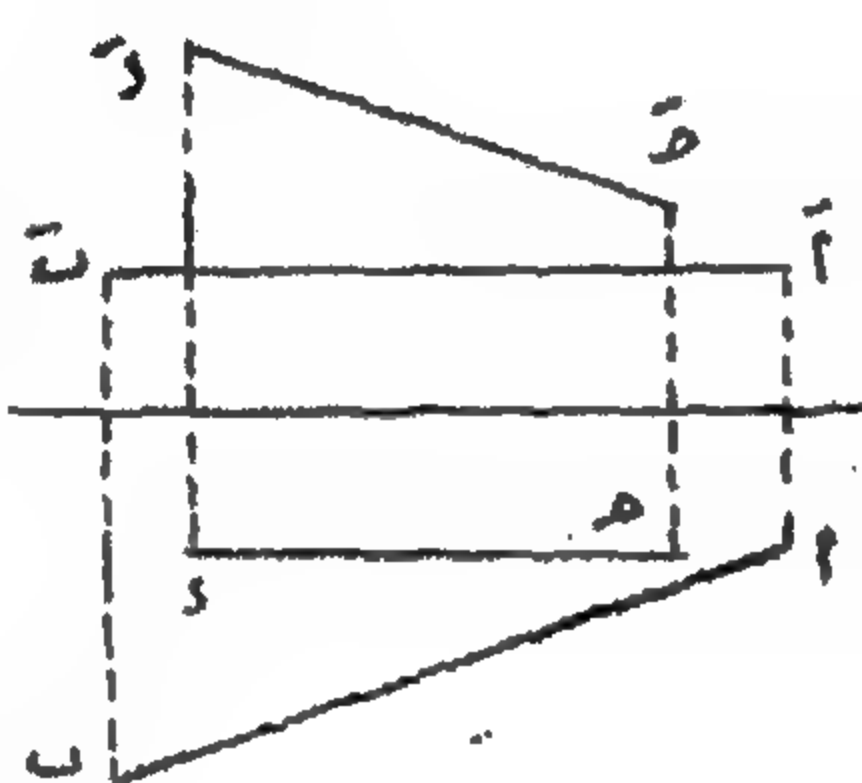
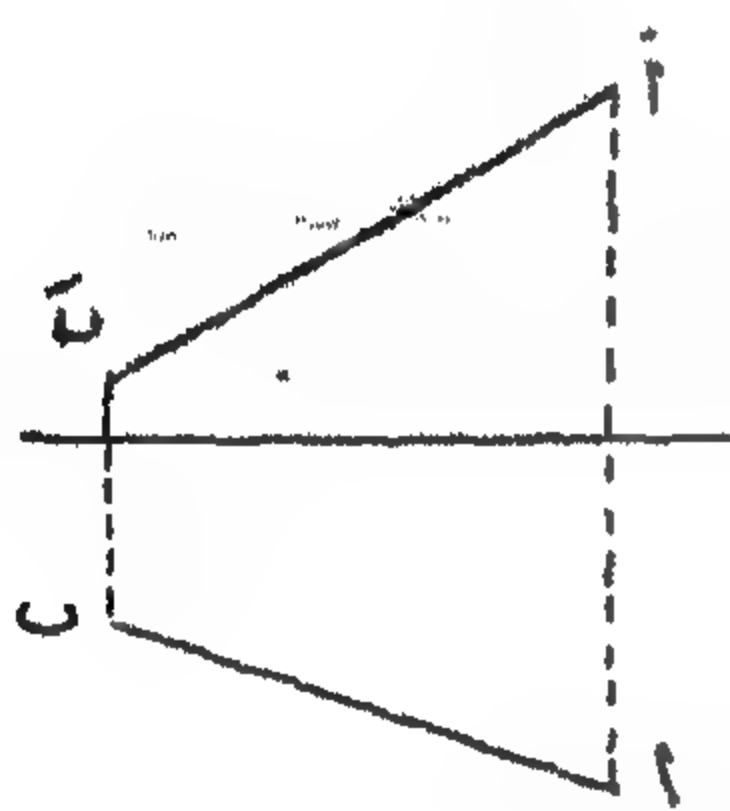
### ١٩ — أوضاع المستقيم في الفراغ بالنسبة لمستويي المسقط :

الاضلاع الاصلية للمستقيم في الفراغ بالنسبة لمستويي المسقط سبعة وهي أولا — عند ما يكون مائلا على مستويي المسقط ويقال له مستقيم اختياري وهذا يكون إسقاطه مائلين على خط الارض كالمستقيم (ا ب — آ ب) شكل ٥٦ (أشكال)

(٥٦)

(٥٧)

(٥٨)



(٥٩)

(٦٠)

(٦١)

ثانياً — عند ما يكون موازيا لأحد مستويي المسقط ويُقال له مستقيم مواز لأحد مستويي المسقط : فإذا كان موازيا للمستوى الرأسى ومائلا على المستوى الأفقى يكون المسقط الرأسى له يساويه فى الطول ويميل مع خط الأرض بزاوية ميل المستقيم فى الفراغ على المستوى الأفقى

أما إذا كان موازيا للمستوى الأفقى ومائلا على المستوى الرأسى يكون مسقطه الأفقى يساوى طوله الحقيقى ويميل مع خط الأرض بزاوية ميل المستقيم فى الفراغ على المستوى الرأسى كالمستقيم (ح و — ح و) و (أ ب — أ ب) على التوالي شكل (٥٧)

ثالثاً — عند ما يكون موازيا لكل من مستويي المسقط وهذا إما أن يكون مسقطاه الأفقى والرأسى موازيين لخط الأرض كالمستقيم (أ ب — أ ب) شكل (٥٨) وأما أن يكون منطبقين عليه فيحتوى عليهما خط الأرض

رابعاً — عند ما يكون عموداً على أحد مستويي المسقط ومواز للآخر وهذا يكون مسقطه على المستوى العمودى عليه نقطة ومسقطه على المستوى الثانى مستقيماً عمودياً على خط الأرض ومساوياً لطوله الحقيقى ككل من المستقيمين (أ ب — آ ب) شكل ٥٩ خاصاً — عندما يكون عموداً على خط الأرض سواء كان هذا المستقيم متلاقياً مع خط الأرض أو فى مستوي عمودى على خط الأرض ولا يقابله وهذا يكون مسقطاه موجودين على مستقيم واحد عمود على خط الأرض أيضاً ولا يكفيان لتعيين وضعه الحقيقى إلا بمساعدة المسقط الجانبى كالمستقيم (ح و — ح و) شكل (٤٠) و (٤١)

سادساً — عند ما يكون موجوداً فى أحد مستويي المسقط فيكون مسقطه على المستوى المشتمل عليه هو نفس المستقيم ومسقطه على المستوى الثانى منطبقاً على خط الأرض ككل من المستقيمين (أ ب — آ ب) و (ح و — ح و) شكل (٦٠) سابعاً — عندما يكون متلاقياً مع خط الأرض ومائلاً عليه يكون مسقطاه مائلين على خط الأرض ومتلاقين معه فى نقطة واحدة منه كالمستقيم (أ ب — آ ب) شكل (٦١)

٢٠ — شرط وجود النقطة الفراغية على المستقيم أو على أحد مسقطيه

توجد النقطة الفراغية على مستقيم ما متى كان مسقطاها موجودين على مسقطي ذلك المستقيم على التناظر فالنقطة  $ح$  (شكل ٦١) اذا وجدت على المستقيم  $ا ب$  يكون مسقطها الاقنى  $ح$  على المسقط الاقنى  $ا ب$  للخط  $ا ب$  ومسقطها الرأسى  $ح$  على المسقط الرأسى  $آ ب$  لهذا الخط وتكون  $ح و ح$  من تعريف مسقطى أى نقطة واقعتين على خط مستقيم واحد عمود على خط الارض

وبناء على هذا اذا أريد تحديد نقطة ما على أى مستقيم معلوم يكفى معرفة مسقط واحد لها على أحد مسقطى المستقيم المعلوم ويمد منها مستقيم عمودى على خط الارض ليقابل المسقط الآخر المستقيم فى نقطة تكون هى المسقط الثانى للنقطة

٢١ — أوضاع المستقيم بالنسبة لمستقيم آخر فى الفراغ

أولاً — اذا تقاطع المستقيم مع مستقيم آخر وكان مستويهما مائلا على كل من مستويي المسقط

فمثلا اذا تقاطع المستقيمان  $ا ب و ح د$  معا فى نقطة مثل  $و$  شكل (٦٢) وكان مستويهما مائلا على كل من مستويي المسقط فان نقطة تقاطعهما  $و$  تقع على كل من المستقيمين . والمسقط الاقنى لها لا بد وان يقع على كل من المسقطين الاقنيين المستقيمين وليكن  $و$  وبالمثل المسقط الرأسى لها يقع على كل من المسقطين الرأسيين لها وليكن  $و$  ويؤخذ من ذلك ان المسقط الاقنى لنقطة التقاطع  $و$  هى نقطة تقاطع المسقطين الاقنيين المستقيمين وكذا المسقط الرأسى لتلك النقطة هى نقطة تقاطع المسقطين الرأسيين لها وان كل من المسقط الاقنى والرأسى لهذه النقطة يكونان على خط مستقيم واحد  $و و$  عمودى على خط الارض

ثانياً — اذا تقاطع المستقيم مع مستقيم آخر وكان مستويهما عموداً على أحد مستويي المسقط

فمثلا اذا تقاطع المستقيمان  $ا ب و ح د$  فى نقطة  $و$  شكل ٦٣ وكان مستويهما عموديا على المستوى الاقنى مائلا على المستوى الرأسى فان مسقطيهما الرأسيين يكونان متقاطعين ومسقطيهما الاقنيين يكونان منطبقين والمسقط الرأسى لنقطة تقاطعهما  $و$  هى نقطة تقاطع

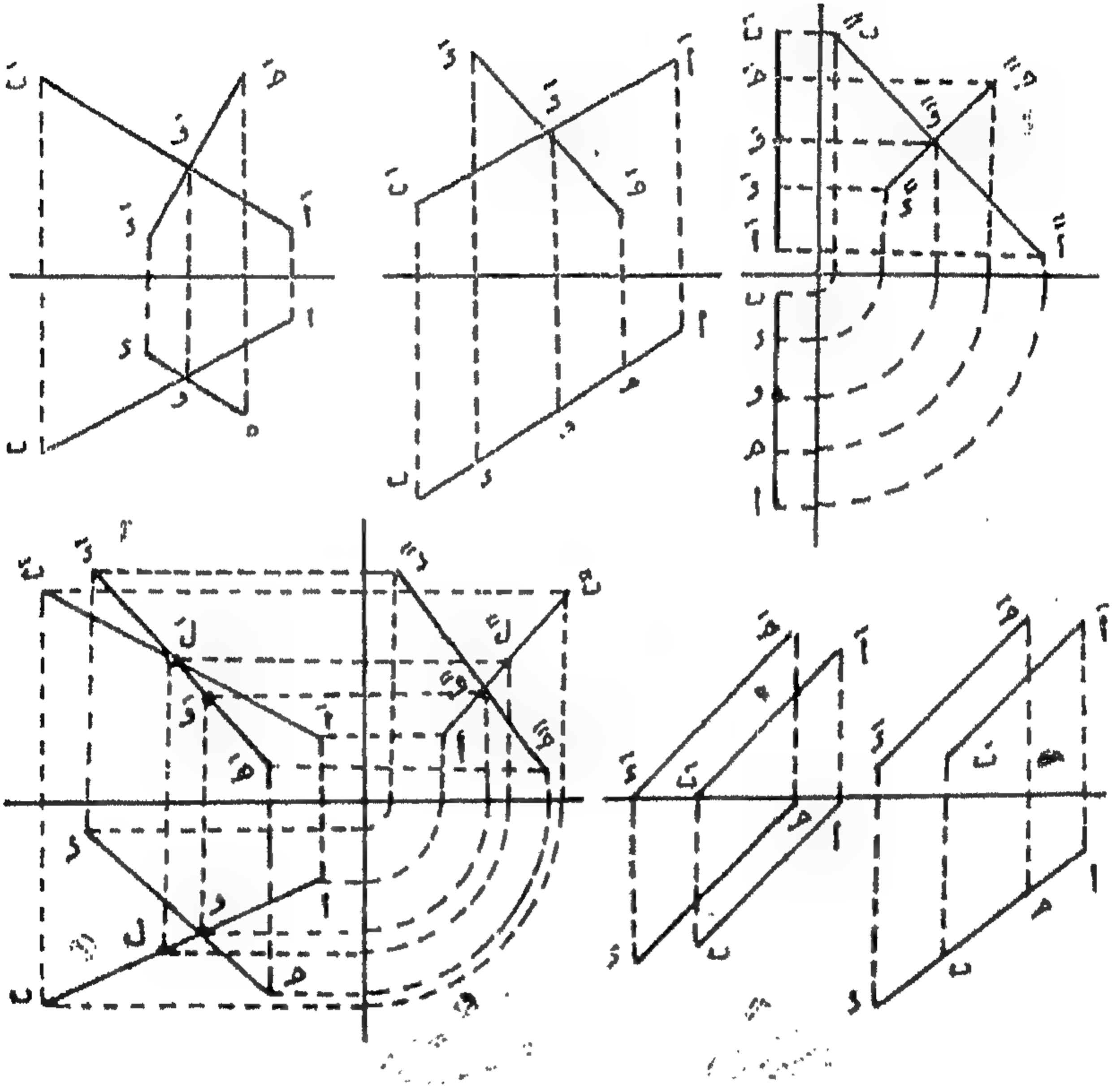
المسقطين الرأسيين ومسقطها الأفقي على خط مستقيم عمودي على خط الأرض من مسقطها  
الرأسي وواقع على المسقطين الأفقيين المنطبقين

(أشكال)

(٦٢)

(٦٣)

(٦٤)



(٦٥)

(٦٦)

ثالثاً — إذا تقاطع المستقيم مع مستقيم آخر وكان مستويهما عموداً على خط الأرض  
فمثلاً إذا تقاطع المستقيمان  $AB$  و  $CD$  في نقطة مثل  $O$  (شكل ٦٤) وكان مستويهما  
عمودياً على خط الأرض ففي هذه الحالة لا يمكن تعيين نقطة تقاطعهما إلا بمساعدة  
المستوى الجانبي كما بالشكل ومنه يتضح إسقاطهما عليه وطريقة إيجاد نقطة التقاطع

ملاحظة: — وعلى ذلك إذا وُجد مسقط خطين أيّاً كانا على مستويي المسقط

ووجد أن نقطة تقابل مسقطيهما الرأسيين ليست على مستقيم واحد عمودي على خط الأرض مع نقطة تلاقي مسقطيهما اللفقيين فلا يكون هذان المستقيمان متلاقين في الفراغ كما هو واضح ( بشكل ٦٥ )

أما في الحالة الثانية والثالثة فلا يمكن الجزم بصحة هذه الملاحظة إلا من المسقط الجانبي رابعاً — اذا وازى مستقيم مستقيماً آخر .

وفي هذه الحالة يكون مسقطاهما على كل من مستويي المسقط متوازيان فإذا فرض أنه المراد رسم مسقطي خط مستقيم يمر بنقطة معلومة مثل ( حـ حـ ) ويوازي مستقيماً آخر معلوم مسقطاه مثل ( ا ب و آ ب ) فيرسم من المسقط الاتقي للنقطة وهو حـ خط حـ د يوازي ا ب ومن المسقط الرأسى لها وهو حـ خط حـ د يوازي آ ب فيكون ( حـ د و حـ د ) هما مسقطا الخط المستقيم المطلوب ويكون بذلك كل من مسقطي الخطين ( ا ب و حـ د ) على كل من مستويي المسقط متوازيين كما في ( شكل ٦٦ )

مسألة ٩ : المعلوم مسقطا كل من خطين متقاطعين والمطلوب إيجاد الزاوية بينهما

المفروضه : أن ( ا ب و آ ب ) و ( ا ب و آ ب ) هي مساط الخطين المستقيمين ا ب و حـ د المتقاطعين في الفراغ ( شكل ٦٧ )

والمطلوب تعيين مقدار الزاوية بينهما ا ب و حـ د

العمل : — نرسم الخط ا ب موازياً لخط الأرض ليقطع المسقطين الرأسيين للخطين في ك و د

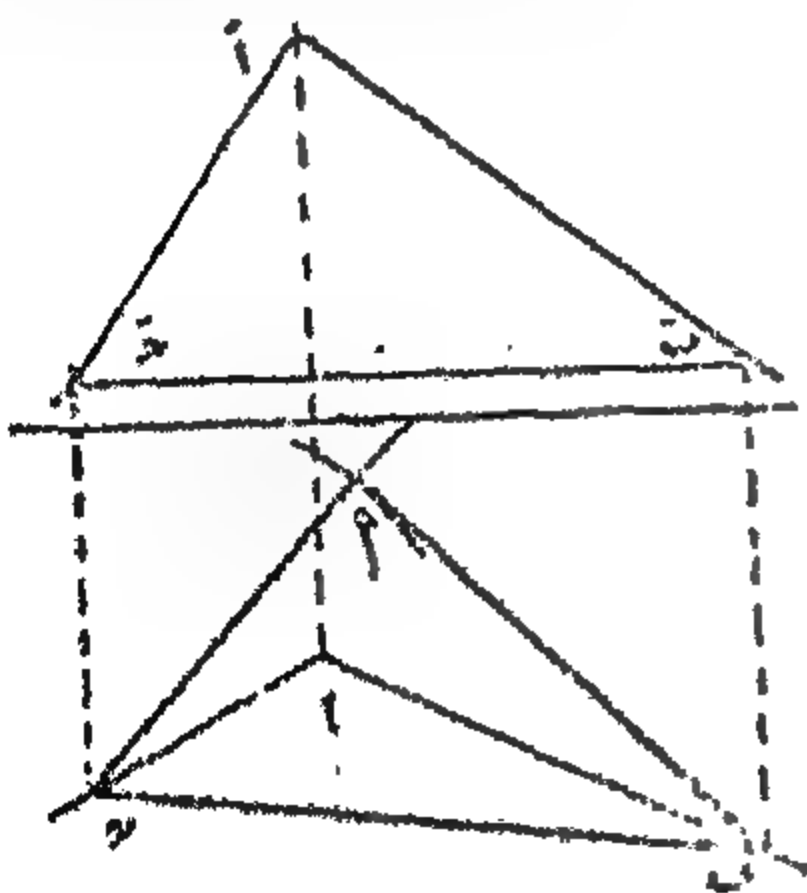
ثم نأخذ بمسقطي النقطتين ك و د اللفقيين وليكونا ق و د على المسقطين اللفقيين للخطين ثم نصل ك د فيكون هو الطول الحقيقي للخط ا ب حـ د ثم نأخذ بالطول الحقيقي للخطين

ا ب و ا ب ونرسم المثلث ا ب حـ د المحتوى على الأطوال الحقيقية للخطوط الثلاثة

فتكون الزاوية ب ا حـ د هي الزاوية المطلوبة

البرهان : — بما أننا كونا مسقطاً رأسياً وأفقياً

لمثلث واتينا باضلاعه الحقيقية ورسمناه فيكون هو الشكل الحقيقي للمثلث ا ب حـ د وتكون الزوايا التي



( شكل ٦٧ )





وضعه في الفراغ قبل انطباقه على المستوى الرأسى ولذلك نقول انه بما ان  $\alpha$  مرسوم  
بميله الحقيقى مع المستوى الافقى  $\alpha$  يكون  $\alpha$  هو طول مسقطه الافقى قبل الدوران

وكذا  $\alpha$  هو المسقط الافقى للخط  $\alpha$  قبل الدوران فما علينا الا ان نركز  
في  $\alpha$  ونتجه تسارى  $\alpha$  ونرسم قوسا فتقع النقطة  $\alpha$  وهى المسقط الافقى للنقطة  $\alpha$   
عليه وحيث أن كل من  $\alpha$  و  $\alpha$  في المستوى الافقى فرضا يكون طول المسقط الافقى  
للخط  $\alpha$  وحدا قبل الدوران وبعده حينئذ اذا ركزنا في النقطة  $\alpha$  وبفتحة  
تساوى  $\alpha$  وهو طول المستقيم  $\alpha$  قبل الدوران وبعده ورسمنا قوسا يتقاطع القوس  
الاول المرسوم من  $\alpha$  في النقطة  $\alpha$  تكون هذه النقطة هى المسقط الافقى للنقطة  $\alpha$   
قبل الدوران ويكون  $\alpha$  المسقط الافقى للخط  $\alpha$  و  $\alpha$  المسقط الرأسى له وكذا  
 $\alpha$  هو المسقط الافقى للخط  $\alpha$  و  $\alpha$  هو المسقط الرأسى له أيضا وهو المطلوب



## تمارينات (١)

## على مساقط النقط والخطوط في الفصل الثاني

- (١) ارسم مساقط النقط الآتية مستعملا خط أرض واحد لجميع المساقط  
 نقطة أ أمام المستوى الرأسى وتبعد عنه ٣ س م وفوق المستوى الأفقى  
 وتبعد عنه ٤ س م  
 نقطة ب أمام المستوى الرأسى وتبعد عنه ٥ س م وتحت المستوى الأفقى  
 وتبعد عنه ٥ در ٤ س م  
 نقطة ج أمام المستوى الرأسى وتبعد عنه ٥ در ٣ س م وموجوده على المستوى  
 الأفقى  
 نقطة د خلف المستوى الرأسى وتبعد عنه ٥ در ٥ س م وفوق المستوى الأفقى  
 وتبعد عنه ٥ در ٣ س م  
 نقطة هـ موجودة في المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى وتبعد عنه ٣ س م
- (٢) ارسم مساقط النقط الآتية على خط أرض واحد مبينا الزاوية الزوجية  
 لمستويي المسقط الموجود فيها كل منها
- نقطة أ تبعد عن المستوى الرأسى ٥ در ٢ س م وعن المستوى الأفقى ٤ س م  
 » ب » » » — ٣ س م » » » ٥ در ٢ س م  
 » ج » » » — ٥ در ٢ س م » » » — ٥ در ٢ س م  
 » د » » » ٣ س م » » » — ٣ س م  
 » هـ » » » ٤ س م وموجوده على المستوى الأفقى  
 » و موجوده في المستوى الرأسى وتبعد عن المستوى الأفقى ٤ س م  
 » ز موجوده في كل من مستويي المسقط

(٣) ر و ف هما الأثران الرأسى والافقى للخط اب (شكل ٤٢) و ر و ف هما مسقطاهما و ف =  $\frac{1}{2}$  و ر =  $\frac{1}{2}$  و ر =  $\frac{1}{2}$  ارسم مسقطى اب فى الزوايا الاربع

(٤)  $a - b - c - d$  هي أربع نقط في الفراغ كل منها في زاوية من الزوايا الزوجية الأربعة انظر شكل (٣٣) و (٣٤) وأبعاد تلك النقط مأخوذة على التوالي عن المستوى الأفقي هي  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = \frac{1}{4}$  و  $c = \frac{1}{4}$  و  $d = \frac{1}{4}$  وأبعادها عن المستوى الرأسى هي على التوالي أيضا  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = \frac{1}{4}$  و  $c = \frac{1}{4}$  و  $d = \frac{1}{4}$  والمسافة من  $a$  إلى  $b$  (شكل ٣٤)  $= 1$  ومن  $b$  إلى  $c = 1$  ومن  $c$  إلى  $d = 1$  ومن  $d$  إلى  $a = 1$  أوجد مساقط وأثرات كل من الخطوط التي يمكن رسمها بين كل من نقطتين من النقط المذكورة

(٥) ارسم مسقطي خط مستقيم طوله ٥ سم في كل من المواضع الآتية :

أولاً — إذا كان موازيا لكل من مستويي المسقط وفوق المستوى الأفقي بمقدار  $2\frac{1}{3}$  م وأمام المستوى الرأسى بمقدار ٤ م ( أى بمقدار البعد عنه )

ثانياً — إذا كان أفقيا ويميل على المستوى الرأسى بزاوية  $30^\circ$

ثالثاً — إذا كان مائلا على المستوى الأفقى بمقدار  $30^\circ$  ومسقطه الأفقى يصنع  $45^\circ$  مع خط الأرض

(٦) ارسم مساقط الخطوط الآتية ثم اوجد أثرى كل منها ان أمكن  
(١) طول ٥ سم مواز لخط الأرض ويبعد ٢٥ سم عن المستوى  
الافقى و ٣٥ سم عن المستوى الرأسى

(٢) ح د طولہ ۵ ر ۵ س م ومواز المستوى الافقى ويميل ۳۰° على المستوى الرأسى ونهايته ح موجودة على المستوى الرأسى وتعلو بمقدار ۳ سانتيمترا عن المستوى الافقى

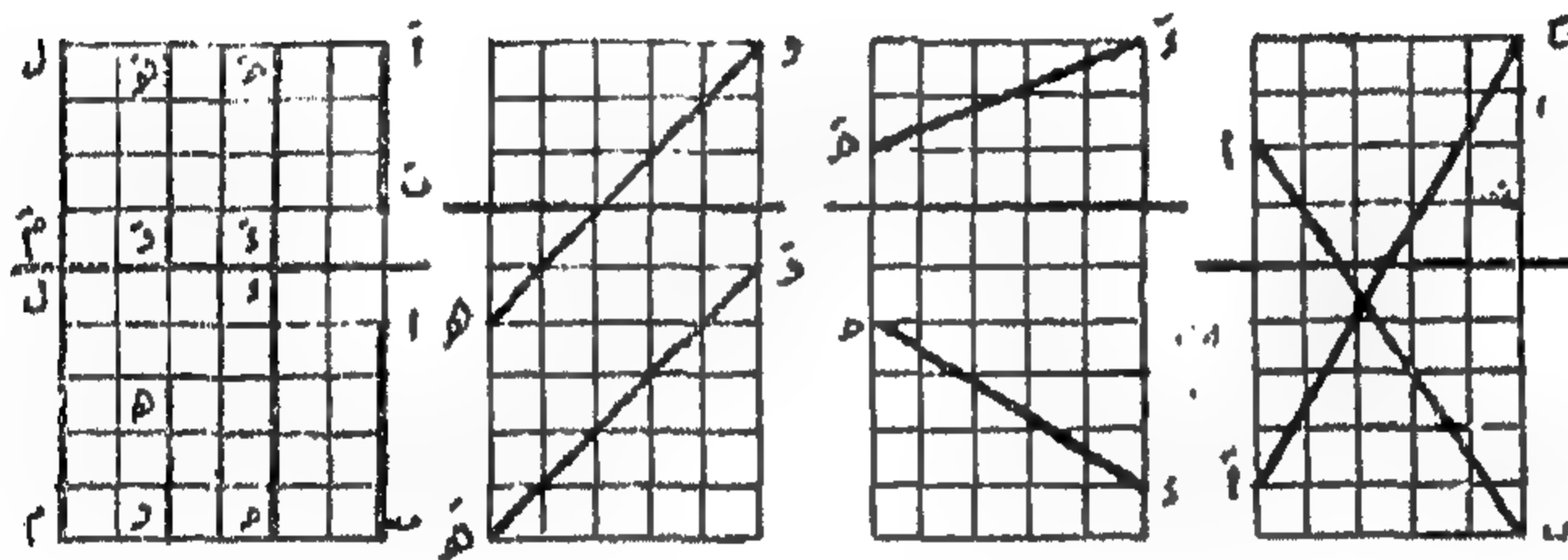
(٣) هـ و طوله ٥ س م عمودي على المستوى الرأسى ويعلو بمقدار ٢٢٥ س م  
عن المستوى الافقى ونهايته هـ تبعد عن المستوى الرأسى بمقدار ١٢٥ س م  
(٧) طول المسقط الافقى لخط مستقيم هو ٥ س م ويعمل هذا المسقط ٣٥°

على خط الأرض ويميل مسقطه الرأسى  $45^\circ$  مع خط الأرض والخط نفسه يقطع خط الأرض . ارسم المسقط الرأسى للخط ثم اوجد طوله الحقيقى وميله على كل من مستويى المسقط

(٨) اوجد الطول الحقيقى وميل واثرى كل من الخطوط المبين مسقطى كل منها فى الاشكال ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ شكل (٧٠)

وبين أيضا فى كل حالة مسقطى نقطة على الخط بعدها الحقيقى من نهاية السفلى هو ٢ سم

شكل (٧٠)



٥

٤

٣

٢

(٩) أ ب وطوله

٦٢٥ سم هو

المسقط الرأسى للخط

مستقيم أ ب مواز

للمستوى الرأسى

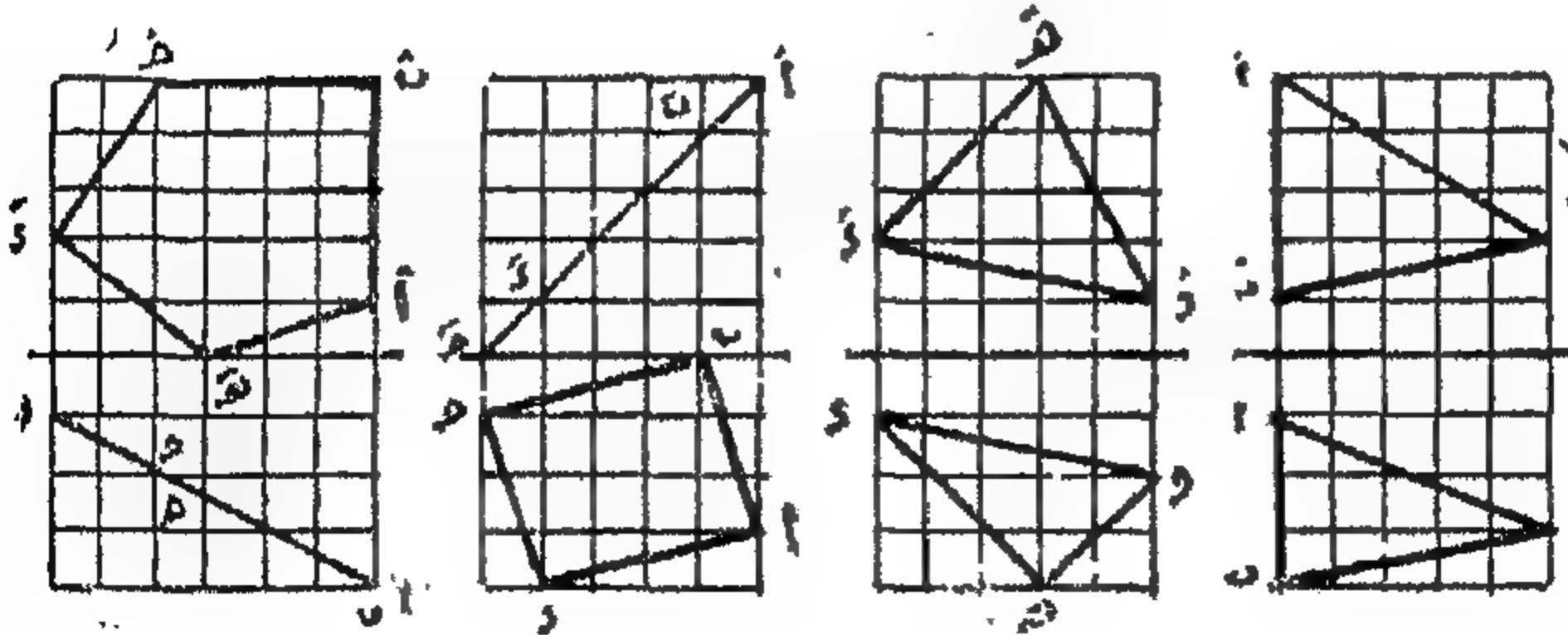
ونهايته أ موجودة

فى المستوى الأفقى وعلى بعد ٢٥ سم من المستوى الرأسى ونهايته الأخرى ب تعالو عن المستوى الأفقى ٣٧٥ سم ارسم المسقط الرأسى والأفقى للخط أ ب

(١٠) اوجد الشكل الحقيقى لمساقط السطوح المبينة بالاشكال ( من ١ الى ٥

شكل (٧١) واوجد ايضا فى كل شكل أثرى كل ضلع من اضلاعه اذا أمكن

شكل (٧١)



٥

٤

٣

٢

(١١) أ ب

هو المسقط الرأسى

لخط مستقيم

(شكل ٧٦)

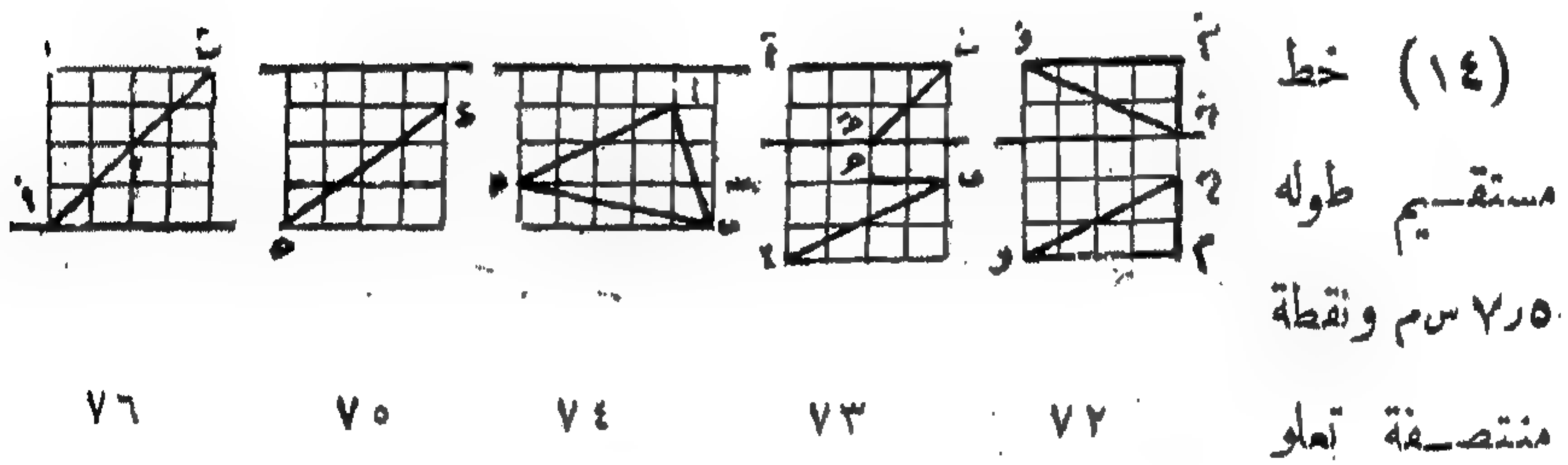
ونهايته ب موجودة



في المستوى الرأسى والخط يميل بزاوية مقدارها  $35^\circ$  مع المستوى الافقى ارسم  
المسقط الافقى لهذا الخط

(١٢) ح د هو المسقط الافقى لخط مستقيم طوله الحقيقى ٧ر٥ سم ونهايته ح  
تحت المستوى الافقى بمقدار ١ سم ونهاية د فوق المستوى الافقى (شكل ٧٥)  
ارسم المسقط الرأسى له

(١٣) ا ب ح (شكل ٧٤) هو المسقط الافقى للمثلث ا ب ح والنقطة ا  
موجودة على المستوى الافقى والنقطة ب فوق المستوى الافقى وتعلو عن  
النقطة الثالثة ح والطول الحقيقى للخط ا ب هو ٦ر٢٥ سم وميل الخط ب ح  
مع المستوى الافقى هو  $40^\circ$  والمطلوب رسم المسقط الرأسى للمثلث وايجاد الطول  
الحقيقى للخط ا ح



بمقدار ٢ر٥ سم عن المستوى الافقى وتبعد بمقدار ٣ سم عن المستوى الرأسى  
وأن الخط يميل  $30^\circ$  مع المستوى الافقى و  $40^\circ$  مع المستوى الرأسى والمطلوب  
رسم مسقطيه

(١٥) اوجد الزاوية الحقيقية بين المستقيمين المتقاطعين ا ب ح و ا ب د  
(شكل ٧٣) ثم اوجد مسقطى الخط المنصف للزاوية ا ب ح

(١٦) بين للمقدار الحقيقى للزاوية م و ن في المثلث المبيّن مسقطاه في (شكل ٧٢)  
ثم ارسم مسقطى الخط الذى يمر بالنقطة م ويقطع و ن في زاوية قائمة

ملاحظة : — عند تمثيل المربعات الموجودة في الاشكال من نمرة ٢٠ الى نمرة ٢٦ يؤخذ ضلع المربع فيها مساوياً الى سنتيمتر واحد

(١٧) ارسم المسقط الافقى لزاوية مقدارها  $60^\circ$  عند ما يكون الخطان المحتويان عليها يميلان بزاوية  $30^\circ 45'$  على التوالى مع المستوى الافقى

(١٨) ا ب ح مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٥ سم ونقطة ا منه واقعة في المستوى الافقى و ب في المستوى الرأسى و ا ب يميل  $45^\circ$  مع المستوى الافقى و ج مع المستوى الرأسى و ب ح يميل  $35^\circ$  مع المستوى الافقى ارسم مسقطيه الرأسى والافقى

انظر حل أغلب هذه المسائل بلوحة نمرة ١ و نمرة ٢



## الفصل الرابع

### في مساقط الاجسام في ابسط اوضاعها في الفراغ

**مقدمة :-** تكلمنا في الفصل الثاني من الهندسة الفراغية عن الاجسام وانواعها هندسيا وفي الفصل الثالث ان علم الهندسة الوصفية هو الفرع الهندسى الذى يبحث عن تمثيل الاجسام ذات الابعاد الثلاثة ( وهى الطول والعرض والسمك ) على اسطح مستوية بواسطة اشكال لها طول وعرض فقط

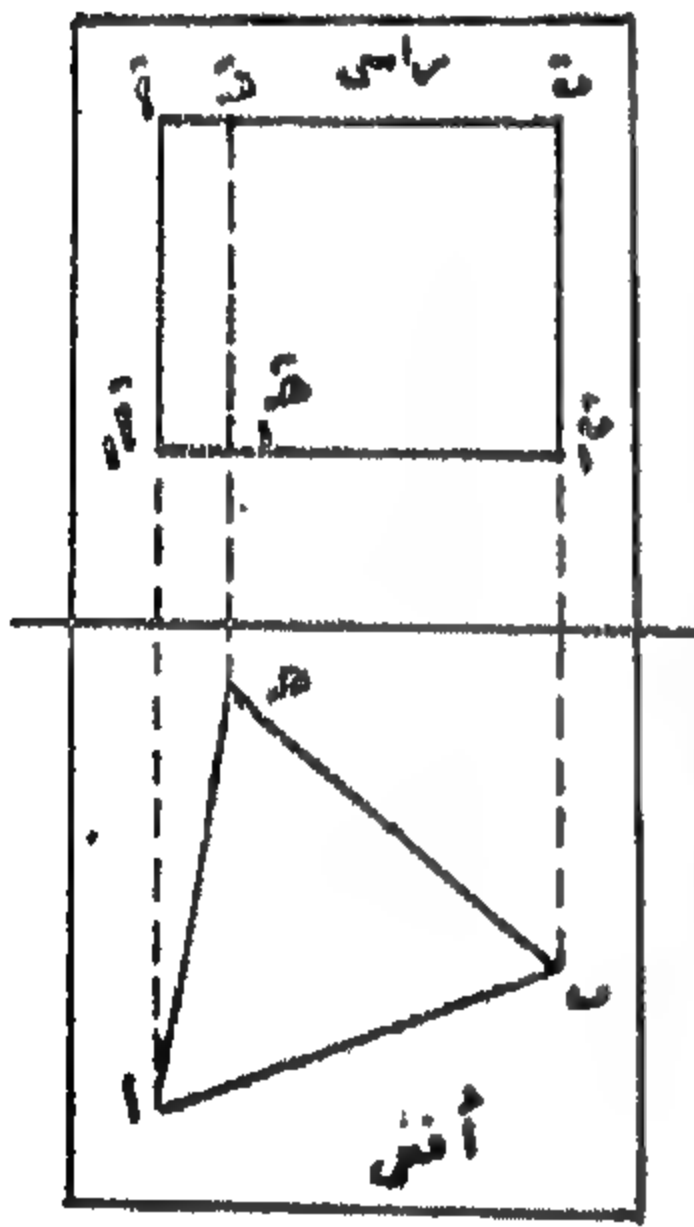
والآن اثباتاً لذلك نقول ان الجسم يمكن اعتباره متكوّنًا من عناصر صغيرة أو نقط مادية لا عدد لها وان مواضع كل منها بالنسبة لبعضها يمكن تمثيله بواسطة اسقاطها على مستويين كمستوي المسقط كما وضح في البنود السابقة من الهندسة الوصفية وحيث أنه عند مشاهدة أى جسم تظهر أمامنا نقط أسطحه الخارجة فقط وتلك النقط وحدها هى التى تعطينا الفكرة عن شكل وحجم ذلك الجسم المتكوّن من امتداد تلك الاسطح فليس من الضروري اذاً عند تمثيل أى جسم ان نبين مساقط نقطه الداخلة بل يمكن الاكتفاء باسقاط الخطوط التى تحد اسطحه الخارجة فقط

اما اذا كان من الضروري معرفة تفصيلات عن تكوين الجسم من الداخل فلا بد من تمثيل عدة نقط أو خطوط مهمة داخلية فيه بواسطة مساقطها وسيأتى الكلام على ذلك فى القطاعات فيما بعد

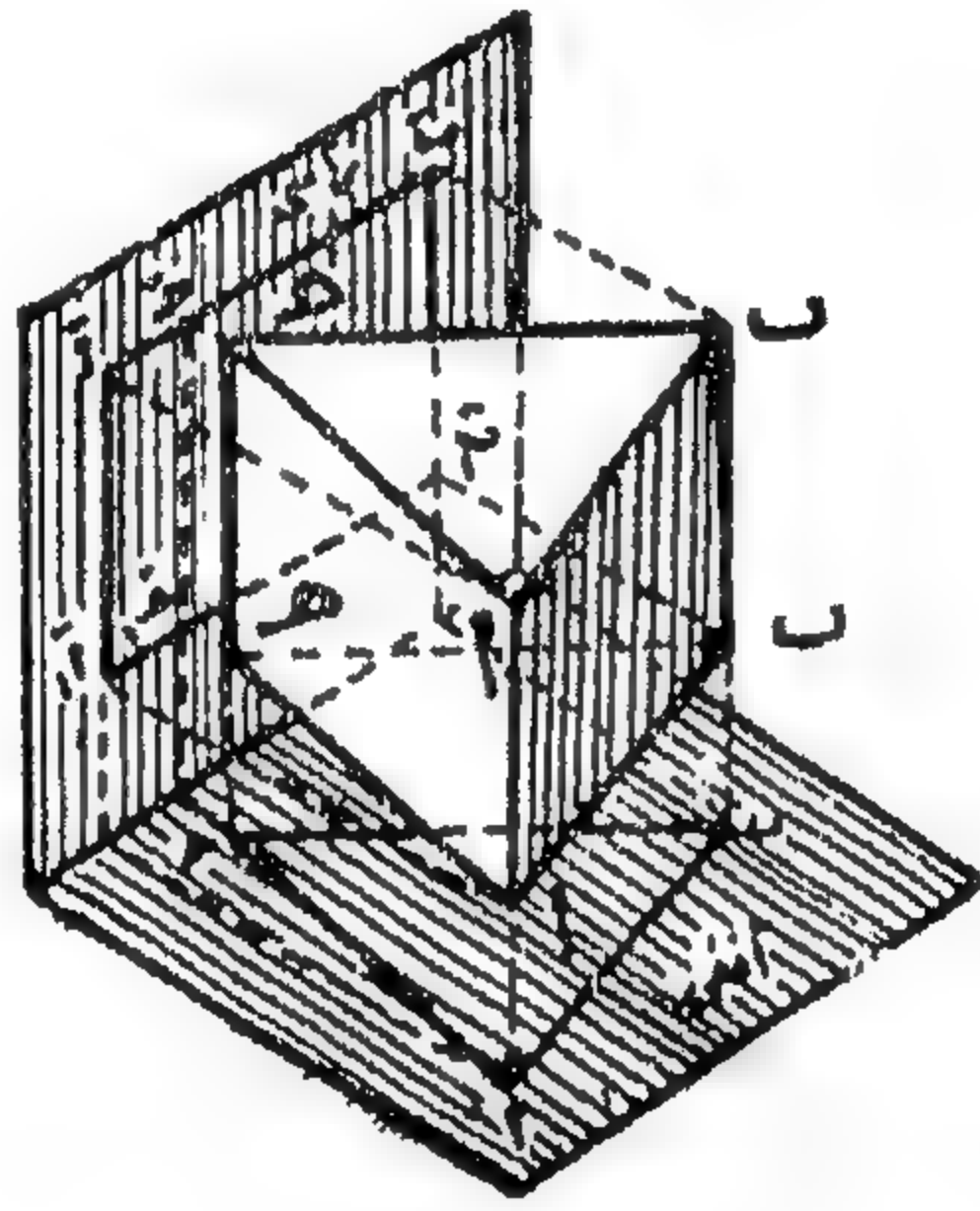
وقد علمنا مما سبق انه بطريقة المساقط يمكننا تعيين الاشكال الحقيقية واطوال ومواضع تلك الخطوط بالنسبة لبعضها وتمثيلها على اسطح مستوية إذاً فمن السهل بواسطة تلك الطريقة وهى « طريقة المساقط » تمثيل أى جسم على اسطح مستوية باسقاط عدد كاف من الخطوط التى تحد اسطحه سواء كانت تلك الاسطح هى اسطحه الخارجة أو الداخلة معا وذلك حسب المراد

## مسألة ١١ - طريقة رسم المسقطين الرأسى والافقى للمنشور

مسقطا المنشور في أبسط أوضاعه هما عند ما تكون إحدى قاعدتيه موازية لأحد مستويي المسقط وفي هذه الحالة يكون مسقطها عليه هو شكلها الحقيقي . وبما أنه من المفروض إعطاء شكل القاعدة الحقيقي فيمكن اعتباره أحد مسقطي المنشور فإذا كان المنشور قائماً وكانت قاعدته موازيتين للمستوى الافقى كما في (٧٧)



شكل ٧٨

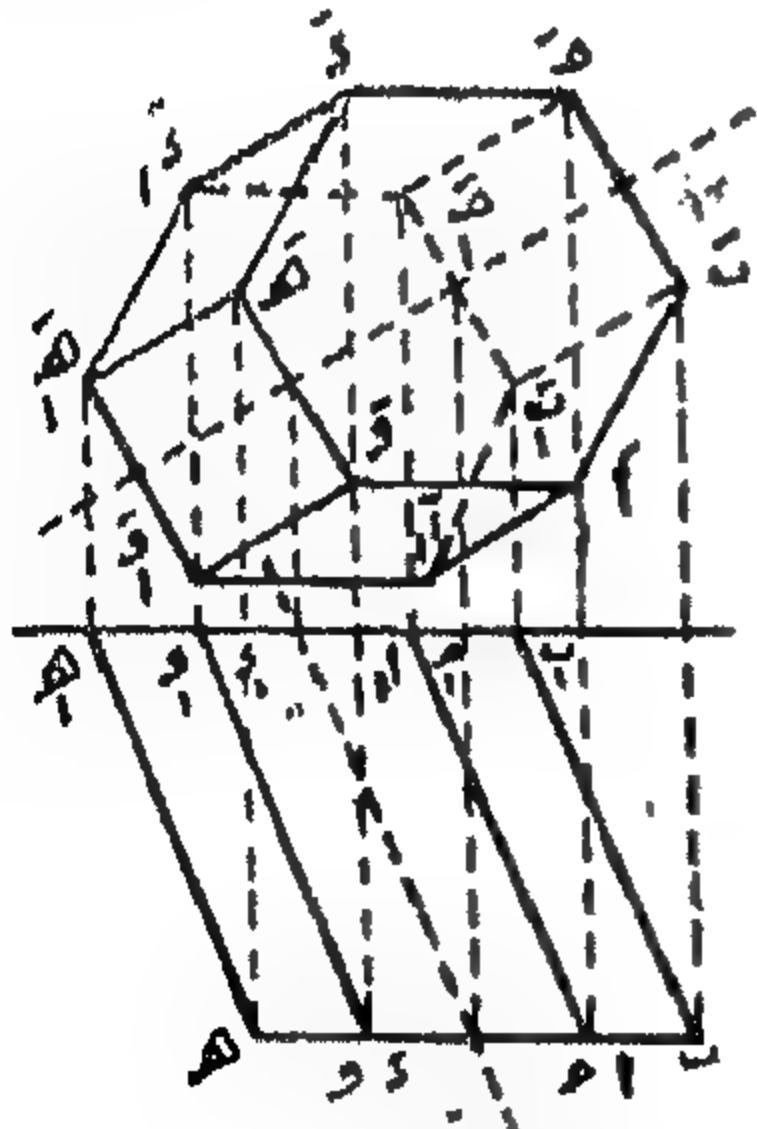


شكل ٧٧

ينطبق مسقطا قاعدتيه على بعضهما ويكونان معاً المسقط الافقى للمنشور وهو المثلث  $أ-ب$  ويكون المسقط الرأسى للقاعدتين خطين موازيين لخط الارض مثل  $أ-أ'$  و  $ب-ب'$  ويبعدان عن بعضهما بمقدار ارتفاع المنشور

وهو  $أ-ب'$  مثلاً ويكون المسقط الرأسى لقاعدته هو  $أ-أ'$  و  $ب-ب'$  ويكون مساقط احرفه إذاً هي الخطوط الرأسية الواصلة من اركان قاعدتيه كل الى نظيره وهي  $أ-أ'$  و  $ب-ب'$  وذلك مبين بالشكلين

(٧٧) و (٧٨)



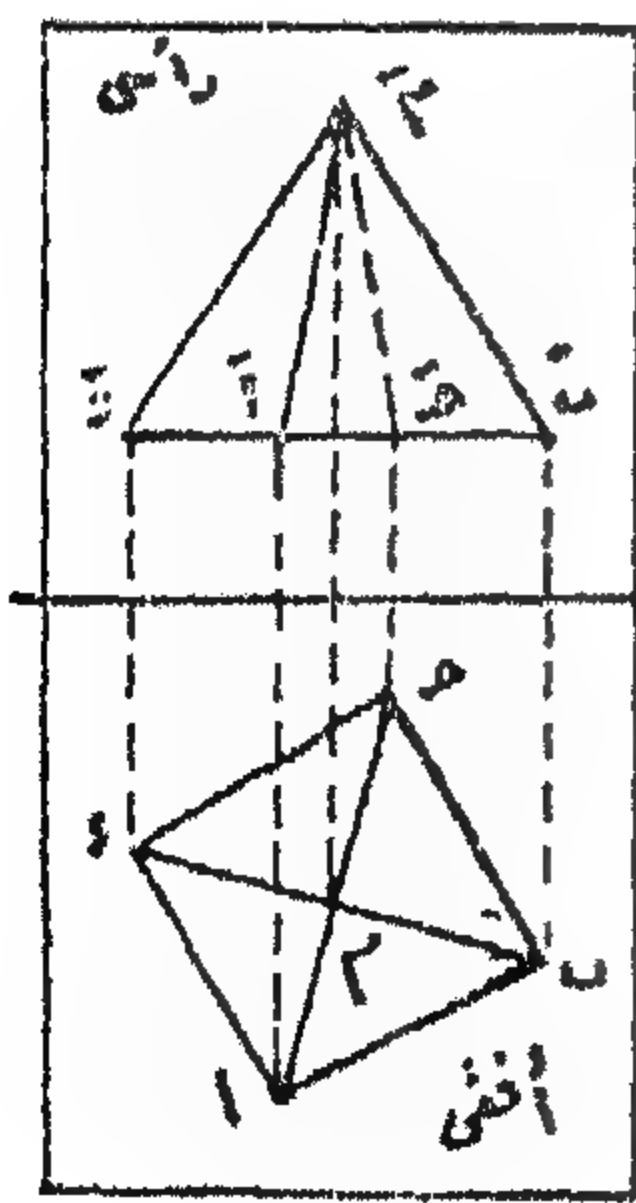
شكل ٧٩

وشكل (٧٩) يبين مسقطي منشور سداسى مائل عند ما تكون قاعدته موازيتين للمستوى الرأسى وفي هذه الحالة يرسم المسقط الرأسى أولاً لقاعدة واحدة لانه يبين الشكل الحقيقي للقاعدة المذكورة وبمساعدة ميل المحور وطوله أو ارتفاع المنشور يمكن رسم المسقط الافقى

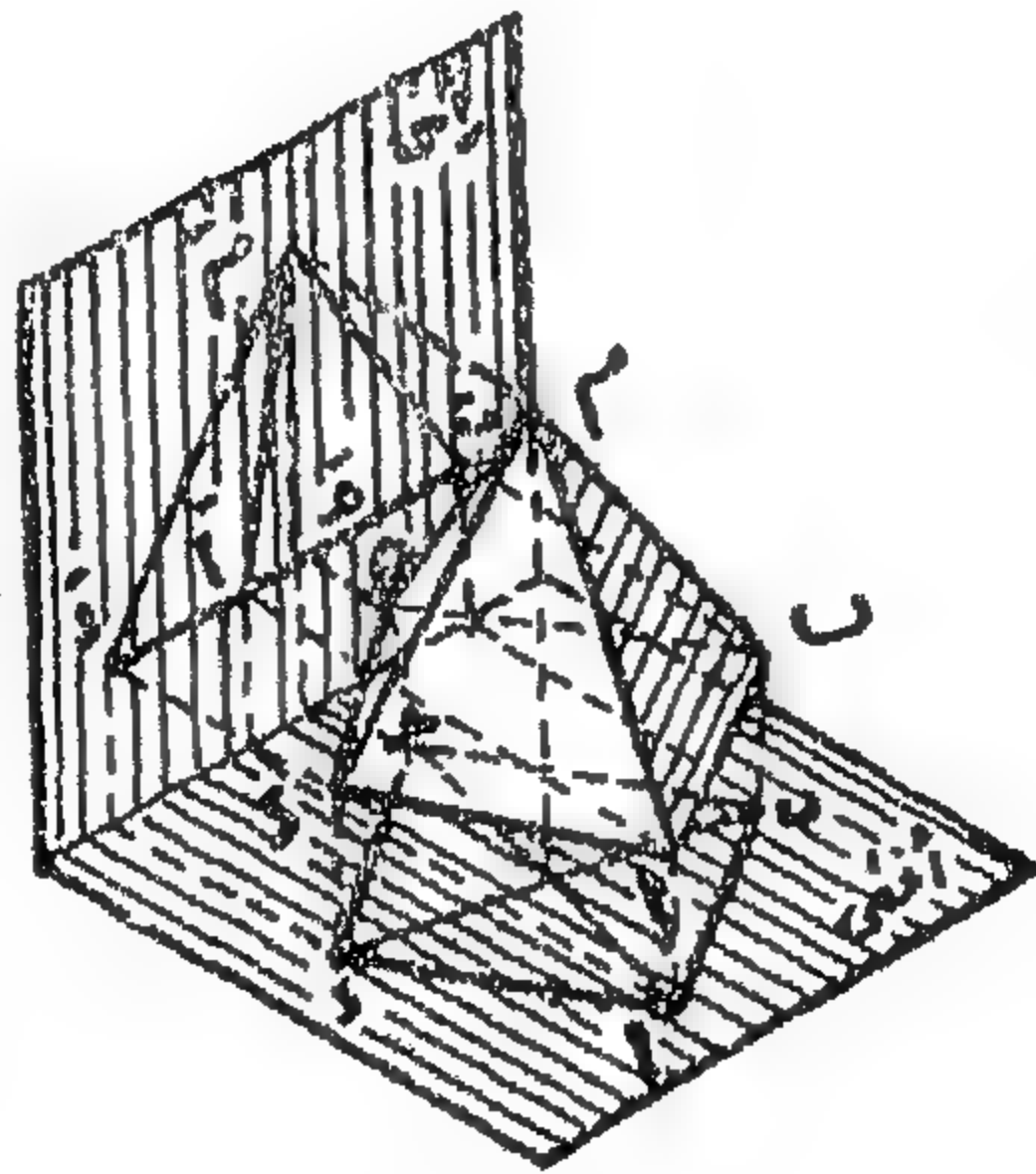
وتكملة المسقط الرأسى المنشور أيضا فيكمل المسقطان كما بالشكل  
 ملاحظة (١) يلاحظ أنه في الشكل (٧٨) وفي المسقط الرأسى المنشور الثلاثى  
 ان أحد أحرفه وهو  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$  يمثل بخط شعاعى وانه في الشكل (٧٩) المسقط الرأسى  
 لخمسة أحرف من المنشور السداسى المائل ممثلة بخطوط شعاعية  
 والسبب فى ذلك ان تلك الاحرف مخرجة بواسطة الجزء الامامى من الجسم فاذا  
 اختبأ أى حرف من أى جسم عند النظر اليه من الامام يكون مسقطه الرأسى  
 شعاعيا واذا اختبأ عند النظر اليه من أعلا أو بمعنى آخر عند إسقاطه على المستوى  
 الافقى يكون مسقطه الافقى شعاعيا أيضا  
 (٢) يلاحظ أيضا أنه عند ما ينطبق مسقط أى حرف ظاهر على مسقط حرف  
 آخر مختبئ يمثل فقط الحرف الظاهر بخط كامل (متصل أو غير شعاعى)

### مسألة ١٢ — طريقة رسم مسقطى الهرم

مسقط الهرم فى أبسط أوضاعه هما عند ما تكون قاعدته موازية لاحد مستويي المسقط  
 والشكل (٨١) يبين مسقطى هرم رباعى فى أبسط أوضاعه بمعلومية الشكل الحقيقى  
 لقاعدته وميل أحد أضلاعها على المستوى الرأسى وفيه المسقط الافقى  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\delta$  يبين  
 الشكل الحقيقى لقاعدته المفروضة والمفروض ميل أحد أضلاعها  $\alpha$   $\beta$  مثلا على  
 المستوى الرأسى



شكل ( ٨١ )



شكل ( ٨٠ )

ومركز القاعدة م  
 يبين المسقط الافقى  
 لرأس الهرم اذا كان قائما  
 ومنه ترسم خطوط  
 مستقيمة الى أركان  
 القاعدة  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\delta$   
 تبين المساقط الأفقية  
 لأحرف أوجهه الجانبية



وفي المسقط الرأسى يظهر مسقط القاعدة خطا مستقيما  $\alpha - \beta - \gamma$  وبمعلومية ارتفاع الهرم يمكن إيجاد المسقط الرأسى لرأسه  $\delta$  وتتكون المساقط الرأسية لأحرف أوجهه بتوصيل  $\delta$  الى  $\alpha - \beta - \gamma$  فيكون  $\delta - \alpha - \beta - \gamma$  هو المسقط الرأسى للهرم والشكل (٨٠) يبين منظور ذلك الهرم مع مسقطية الافقى والرأسى .

مسألة ١٣ — طريقة رسم مساقط كثير السطوح ذى الاربعة أوجه المنتظم

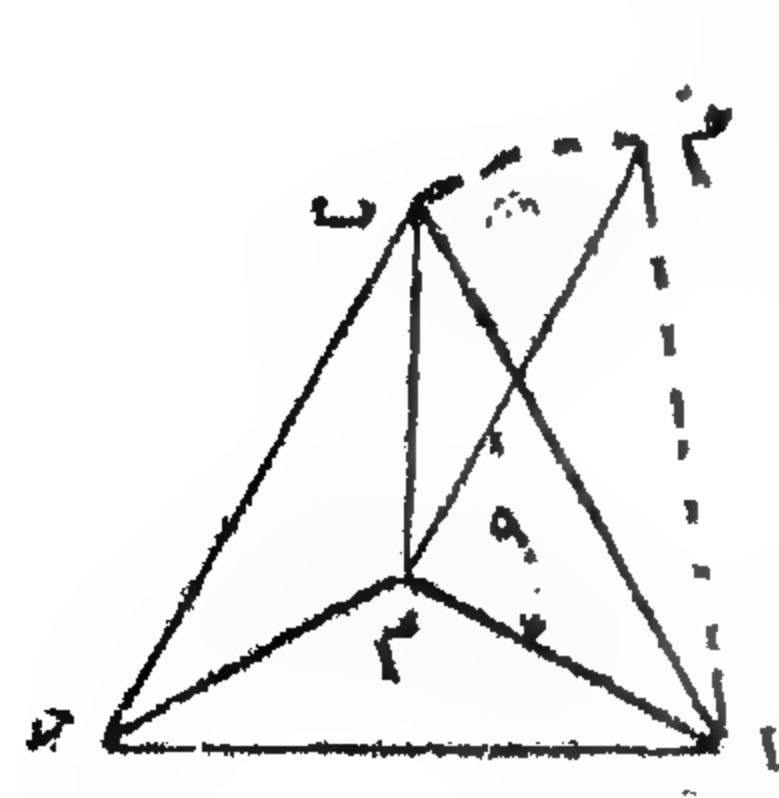
كثير السطوح ذو الاربعة أوجه المنتظم هو فى الحقيقة هرم ثلاثى أوجهه متساوية ومتساوية للقاعدة فلايجاد مسقطيه يكتفى بمعرفة شكل احد أوجهه وطريقة رسمه هى نفس طريقة رسم الهرم الرباعى السابقة الذكر فقط يتعين علينا إيجاد ارتفاعه بالطريقة الآتية بعد

فاذا علم مقدار الارتفاع يكون المسقط الافقى هو الشكل الحقيقى لقاعدة الهرم الثلاثى المذكور ويكون المسقط الرأسى لقاعدته خطا مستقيما موازيا لخط الارض ومن مركز القاعدة فى المسقط الافقى يمكن إيجاد المسقط الافقى لأحرفه كما سبق ومنها ايضا ومن ارتفاعه يمكن إيجاد مسقطها الرأسى ثم المسقط الرأسى لأحرفه

مسألة ١٤ — المفروضه قاعدة كثير السطوح ذى الاربعة أوجه المنتظم

أ ب ح د شكل ٨٢ والمطلوب إيجاد ارتفاعه

الحل : — شكل (٨٢) يبين المسقط الافقى لكثير السطوح ذى الاربعة أوجه عند ما يكون أحد أوجهه موازيا للمستوى الافقى  $\alpha - \beta - \gamma$  هو المسقط الافقى لأحد



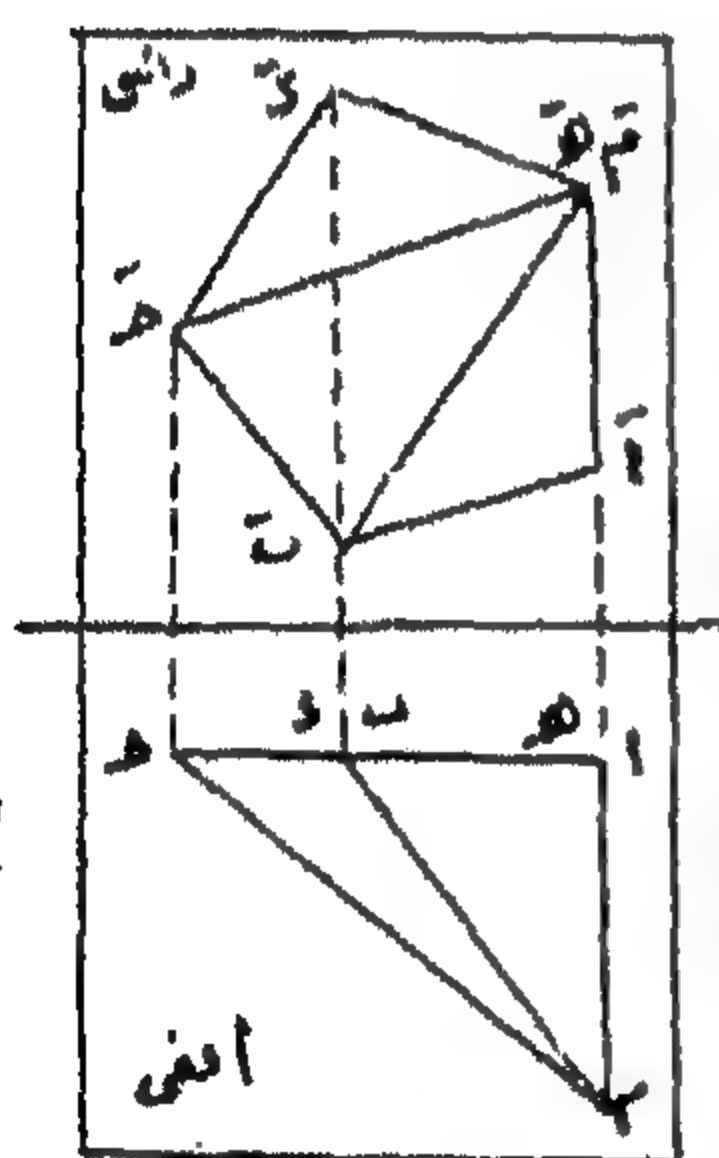
شكل ٨٢

أحرفه المائلة فيما أن جميع أوجهه متساوية وكلها مثلثات متساوية الاضلاع وبما أن ارتفاع هذا الهرم يساوى ضلع مثلث قائم الزاوية . ضلعه الآخر هو المسقط الافقى لأحد الأحرف المائلة ووتره هو الطول الحقيقى لهذا الحرف وحيث أن  $\alpha - \beta - \gamma$  هو المسقط الافقى للحرف  $\alpha - \beta$  فاذا ركزنا فى نقطة  $\alpha$  ونصف قطر يساوى الطول الحقيقى

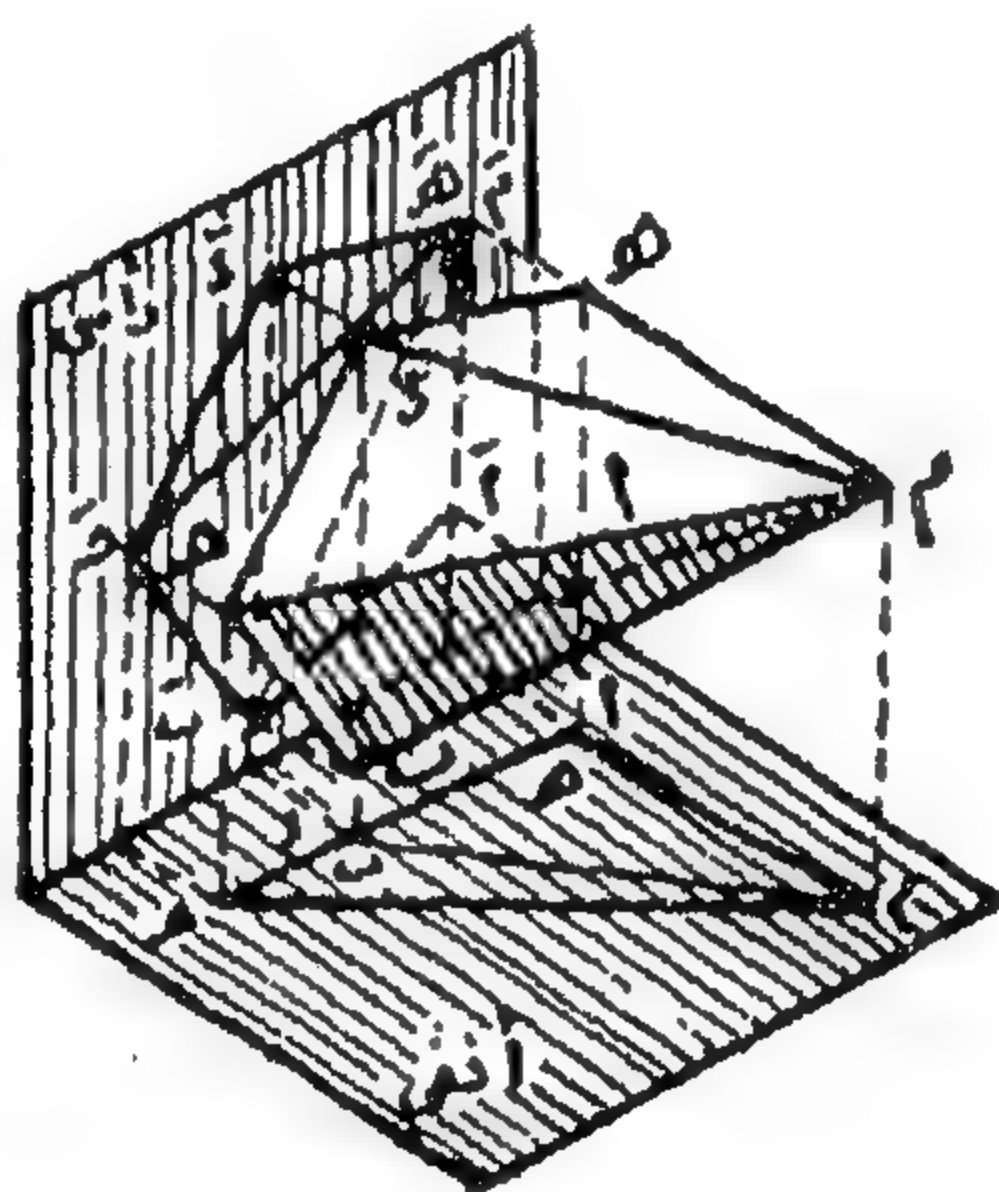
للحرف  $\alpha$  م ( وهو يساوى أيضا  $\alpha$  ) ليقابل العمود المقام من م على  $\alpha$  م في نقطة مثل م  
يكون المثلث سابق الذكر هو المثلث  $\alpha$  م م ويكون م م ضلع ذلك المثلث الذى  
يساوى الارتفاع المطلوب

مسألة ١٥ - طريقة رسم مسقطي هرم خماسي قاعدته موانية للمستوى  
الرأسي وظهر أوجهه في مستو عمودي على كل من مستويي المسقط

الشكل (٨٤) يبين مسقطي هرم خماسي قاعدته  $A B C D E$  موازية للمستوى  
الرأسي  $A O$  واحد أوجهه  $A B C$  في مستوى عمودي على كل من مستويي المسقط



شکل (۸۴)



شکل (۸۳)

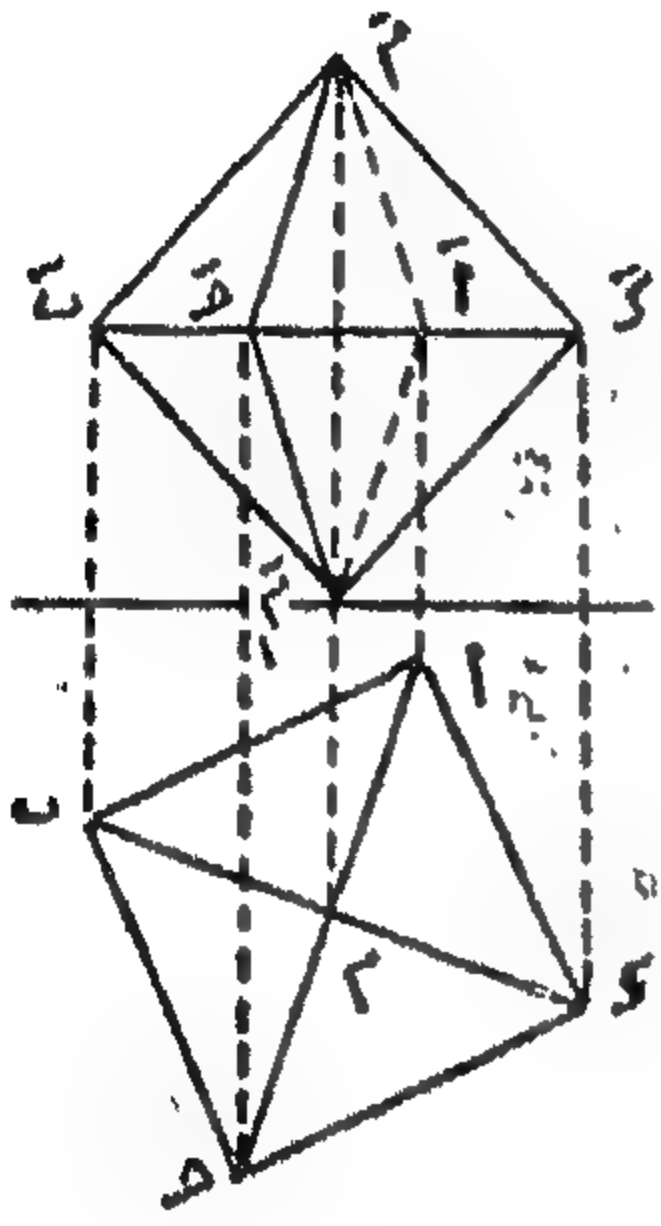
ولرسم مسقطيه يبدأ  
أولا برسم المبتسط الرأسى  
لقاعدته المفروضة  $ab$   
حده ثم مسقطها الافقى  
وهو خط مستقيم مواز  
لخط الارض وليكن  $a'b'$   
حده وبعلمية مسقطى  
رأس الهرم  $m$  من

الايضاحات المفروضة وتوصيلهما الى كل من مسقطى اركان القاعدة ينتج مسقطى الهرم المطلوب وبشكل ( ٨٣ ) المنظور موضح موضع الهرم في الفراغ ومسقطيه الرأسى والافقى

مسألة ١٦ - طريقة رسم مسقطي كبر السطوح ذي الثمانية الأوجه المنتظم

من المعلوم أن الخطوط الواصلة بين كل رأسين متقابلين من رؤوس كثير السطوح  
ذى الثمانية أوجه المنتظم تكون محاوره وعددها ثلاث كلها متساوية وتنصف بعضها  
بعضا وتتلاقى عند مركز الجسم في زوايا قوائم.

وعند فحص الجسم قد وجد أنه يمكن تقسيمه بثلاث طرق مختلفة الى هرمين رباعيين قائمين مشتركين في القاعدة وواجه كل منهما مثلثات متساوية الاضلاع ومتساوية. وان قطرين من اقطاره الثلاثة هما قطرا المربع المكون لقاعدة هذين الهرمين المشتركين والقطر الثالث هو الواصل بين رأسيهما. فاذا وضع هذا الجسم



(شكل ٨٥)

بحيث يكون أحد اقطاره عموديا على أحد مستويي المسقط يكون مسقط الجسم كله على المستوى الثاني هو مربع مع قطريه فشكل (٨٥) يبين المسقط الأفقي والرأسي لكثير السطوح ذي الثمانية الواجهة المنتظم في هذه الحالة. فمسقطه الأفقي هو المربع  $abcd$  مع قطريه  $ac$  و  $bd$  و المتلاقيين. في  $m$  وهذا يرسم أولا والمربع  $abcd$  هو المسقط الأفقي للقاعدة المشتركة للهرمين المذكورين وهو شكلها الحقيقي ونقطة  $m$  مركز

القاعدة المشتركة هي المسقط الأفقي لرأسى الهرمين والخط  $pm$  هو المسقط الرأسى لمحور الرأسى لهذا الجسم ويكون عمودياً على خط الارض وطوله مساو لـ  $ac$  و  $bd$  و قطري القاعدة المشتركة أو ارتفاع الهرمين معاً

و  $ap$  و  $aq$  هو المسقط الرأسى للقاعدة المشتركة بين الهرمين وهو خط مستقيم مواز لخط الارض ومنصف للخط  $pm$

مسألة ١٧ — طريقة رسم مساقط الاجسام المستديرة

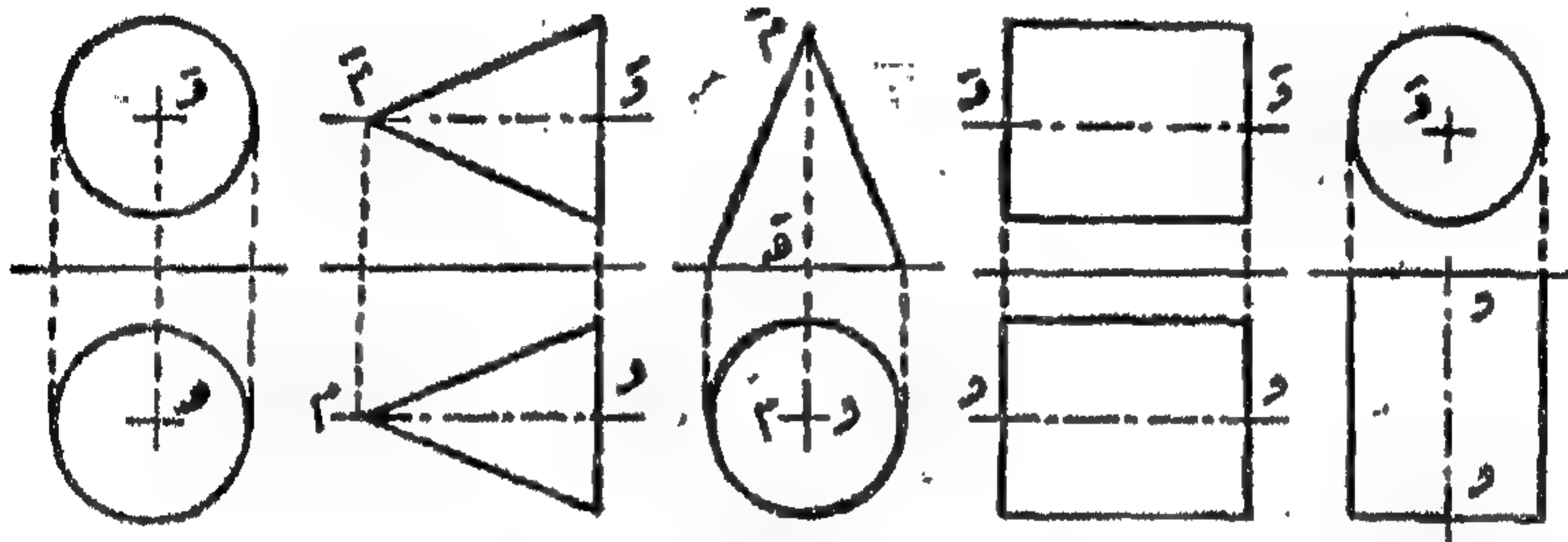
أولا — مسقط الاسطوانة القائمة على كل من مستويي المسقط

(١) تكون الاسطوانة القائمة في أبسط أوضاعها في الفراغ

عند ما يكون محورها عمودياً على أحد مستويي المسقط وفي هذا الوضع يكون مسقطها على هذا المستوى هو دائرة قطرها مساو لقطر الاسطوانة ويكون مسقطها على المستوى الثاني عبارة عن مستطيل أحد أضلاعه مواز لخط الارض ومساو لقطر

الاسطوانة أيضا والضلع المجاور له من المستطيل مساو لطول الاسطوانة وشكل ٨٦  
يبين مسقط الاسطوانة في هذا الوضع

( ب ) عند ما يكون محورها موازيا لـ شكل من مستوي المسقط  
وفي هذه الحالة يكون كل من مسقطيها على مستوي المسقط مستطيلا كالمستطيل  
السابق ذكره في الحالة الاولى ويكون أحد اضلاعه مساويا لقطر الاسطوانة وعموديا  
على خط الارض والضلع المجاور له مساويا لطولها وموازيا لخط الارض وشكل ٨٧  
يبين مسقط الاسطوانة في هذا الوضع



( شكل ٨٦ ) ( شكل ٨٧ ) ( شكل ٨٨ ) ( شكل ٨٩ ) ( شكل ٩٠ )

ثانياً — مسقطا المخروط القائم

يكون المخروط القائم في أبسط أوضاعه في الفراغ : —

( ١ ) عند ما يكون محوره عمودياً على أحد مستويي المسقط وفي هذا الوضع  
يكون مسقطه عبارة عن دائرة قطرها مساويا لقطر قاعدة المخروط ويكون مسقطه  
الآخر مثلثا متساوي الساقين وقاعدته مساوية لقطر قاعدة المخروط وموازية لخط  
الأرض وارتفاعه مساويا لارتفاع المخروط وشكل ٨٨ يبين مسقط المخروط في  
هذا الوضع

( ب ) عند ما يكون محوره موازياً لكل من مستويي المسقط وفي هذه الحالة  
يكون كل من مسقطيه على مستوي المسقط مثلثاً كالمثلث السابق ذكره في ( ١ )  
وقاعدته مساوية لقطر قاعدة المخروط وعمودية على خط الارض وارتفاعه  
مساويا لارتفاع المخروط وموازيا لخط الارض وشكل ٨٩ يبين مسقط المخروط في  
هذا الوضع





## تمارين ٢

## على مساقط الاجسام

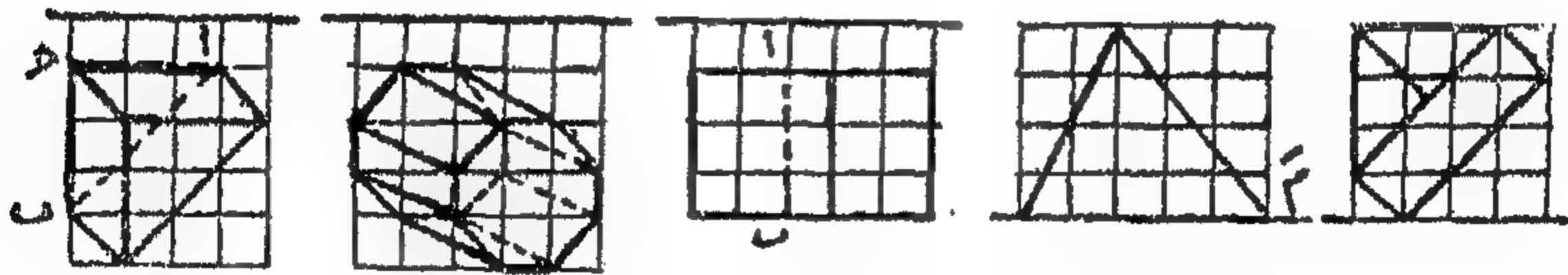
(١) مكعب طول أحد أحرافه ٢ر٥ سم وأحد أوجهه موازياً للمستوى الأفقي ويبعد عنه بمقدار ٢ سم والمسقط الأفقي لهذا المكعب هو مربع يميل أحد أحرافه بزاوية ٣٠° مع خط الأرض ويبعد أقرب أركانه عن خط الأرض بمقدار ٢ر٥ سم أوجد مسقطي هذا المكعب على كل من مستويي المسقط

(٢) أوجد مسقطي المكعب في المسألة السابقة اذا كان موضوعاً عليه كرة ومركزها على خط مستقيم واحد مع مركز إحدى قاعدتيه الأفقيتين وقطرها يساوي ٢ سم

(٣) أوجد مسقطي المكعب في المسألة نمرة (١) اذا كان موضوعاً عليه هرم رباعي قائم ارتفاعه ٣ سم وأحد أضلاع قاعدته مساوٍ لطول حرف المكعب ويميل بزاوية ٤٥° مع خط الأرض وينطبق مركز قاعدة هذا الهرم على مركز الوجه الأعلى للمكعب

(٤) شكل ٩٢ يبين المسقط الأفقي لمنشور ثلاثي مائل قاعدته ا ب ح موضوع

## أشكال



٩٢

٩٣

٩٤

٩٥

٩٦

على المستوى الأفقي وارتفاعه ٤ سم . ارسم المسقط الأفقي لهذا المنشور ثم اوجد منه المسقط الرأسى . ارسم أيضاً مسقطي هذا المنشور على مستويي المسقط عند ما تكون قاعدته على المستوى الأفقي والحرف ا ب منه موازياً لخط الأرض

(٥) شكل ٩٣ يبين المسقط الأفقي لمنشور مائل عند ما تكون إحدى قاعدتيه

منطقة على المستوى الافقى وارتفاعه ٤ سم ارسم مسقطه الافقى هذا ومنه أوجد المسقط الرأسى

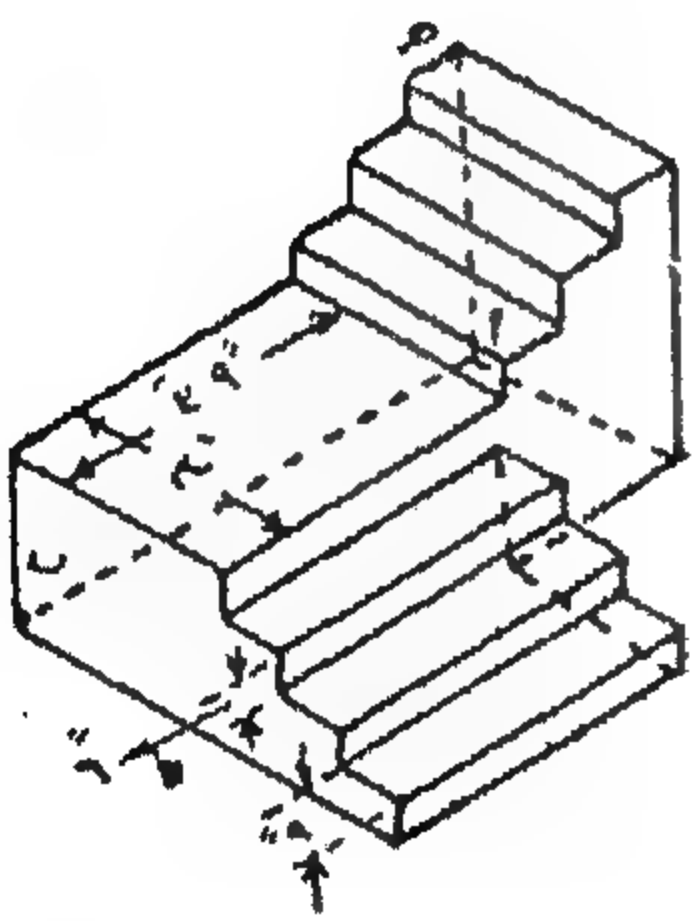
(٦) شكل ٩٤ يبين منشوراً رباعياً قائماً أحد أحرفه  $a$  ب منطبق على المستوى الافقى ارسم مسقطه الافقى هذا ومنه أوجد المسقط الرأسى

(٧) شكل ٩٥ يبين المسقط الرأسى لهرم رباعى قائم ونقطة  $m$  هى المسقط الرأسى لرأس ذلك الهرم . ارسم المسقط الرأسى هذا ومنه اوجد المسقط الافقى

(٨) شكل ٩٦ يبين المسقط الرأسى لمنشور رباعى قائم وموضوع عليه هرم رباعى قائم واركان قاعدة ذلك الهرم واقعة على نقط منتصفات أحرف أحد الأوجه المربعة المنشور ارسم المسقط الرأسى هذا ومنه أوجد المسقط الافقى

(٩) أوجد مسقطى كثير السطوح ذى الاثنى عشر وجهها المنتظم الذى طول كل حرف من أحرفه ٥ سم عند ما يقع أحد أوجهه على المستوى الرأسى وعند ما يميل أحد أحرف هذا الوجه بزاوية  $20^\circ$  مع خط الارض

(١٠) أوجد مسقطى كثير السطوح ذى الثمانية أوجه المنتظم الذى طول كل حرف من أحرفه ٤ سم عند ما يكون أحد محاوره عموديا على المستوى الرأسى والمسقط الرأسى لمحور آخر منه يميل بزاوية  $60^\circ$  مع خط الارض

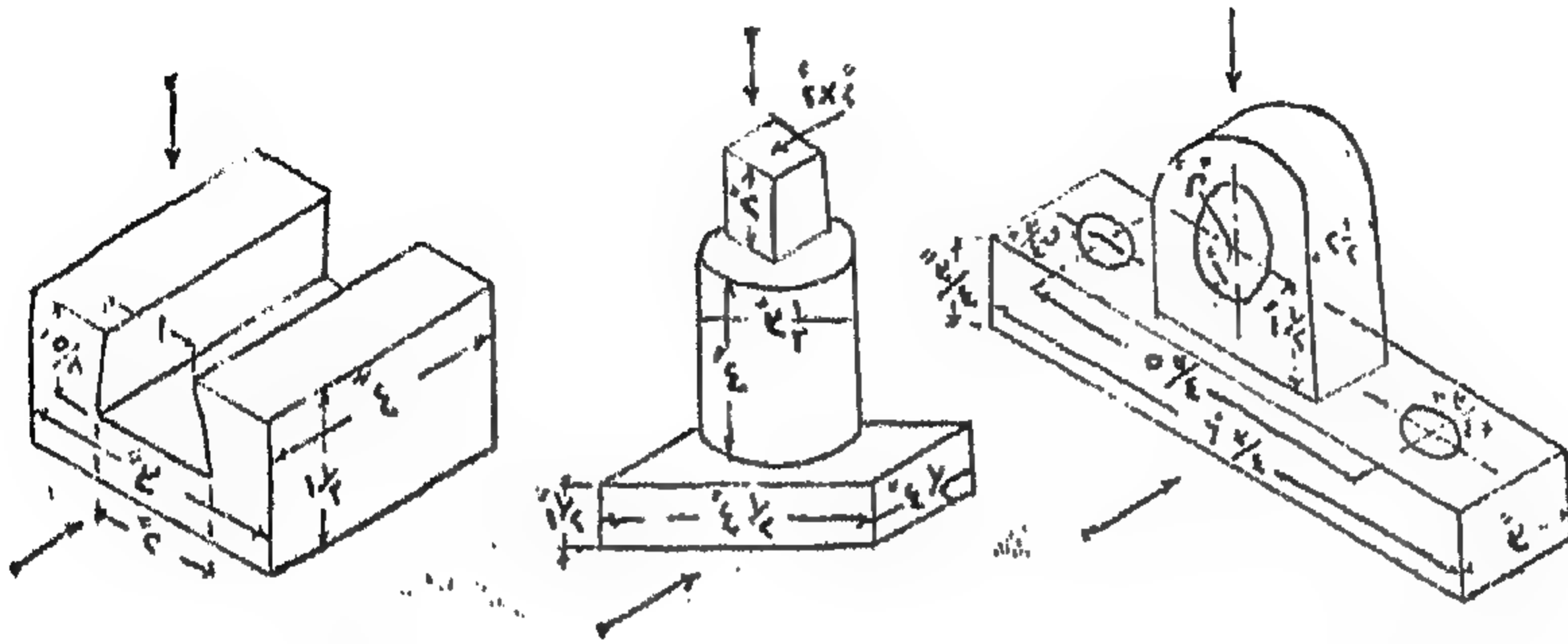


شكل (٩٧)

(١١) شكل ٩٧ يبين منظوراً لقلبتين من الدرج وبسطة بينهما اسلم . ارسم مسقطى القلبتين والبسطة بمقياس مناسب للورقة عند ما يكون الحرف  $a$  فى المستوى الرأسى والحرف  $b$  فى المستوى الافقى ويميل بزاوية  $30^\circ$  مع خط الارض

(١٢) أوجد مسقطى كل من الأجسام المبينة فى الاشكال من  $a$  الى  $h$  فى اتجاه الأسهم شكل ٩٨

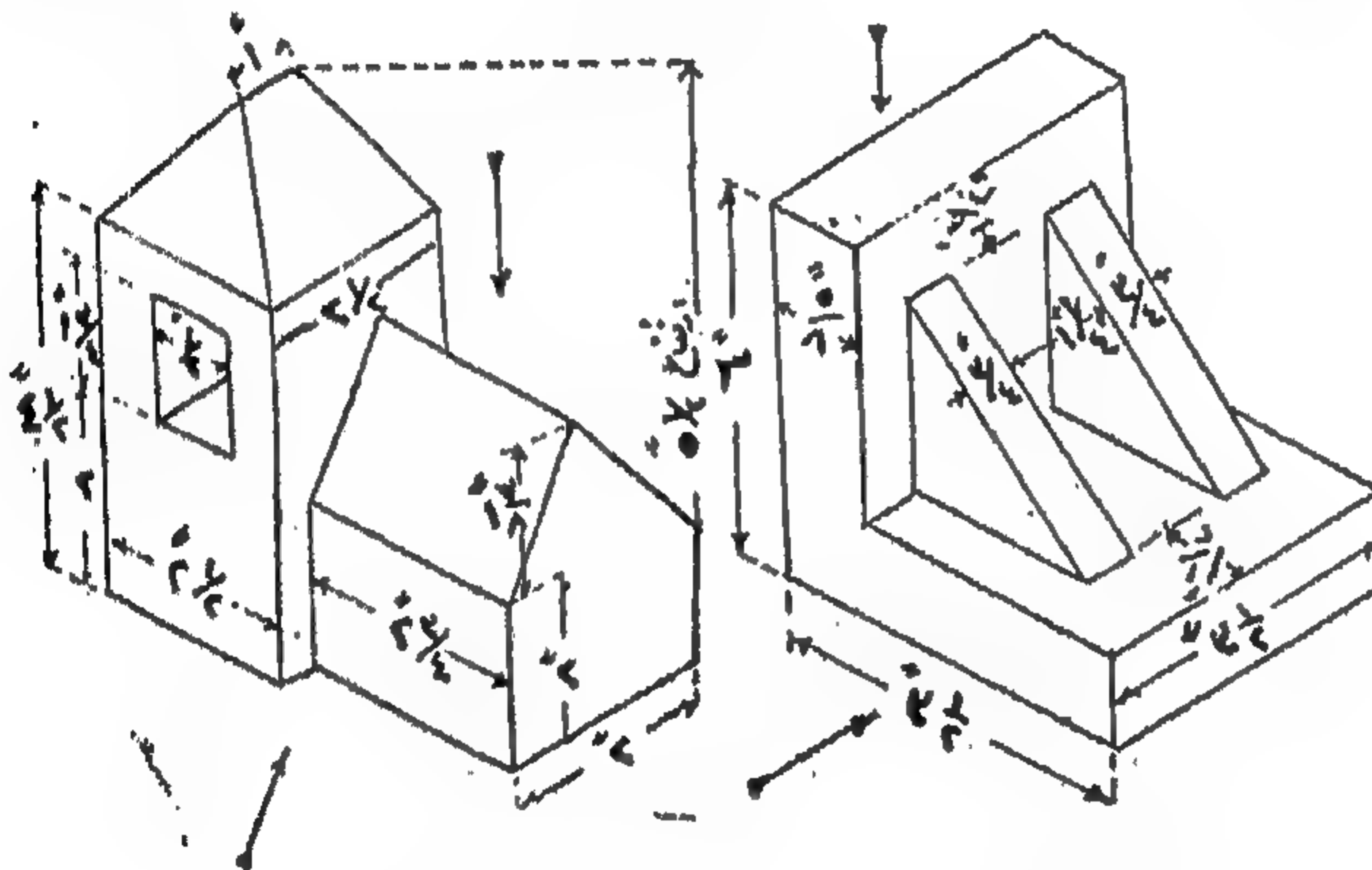
شکل (۹۸)



(شکل ح)

(شکل ب)

(شکل ا)



(شکل ه)

(شکل د)

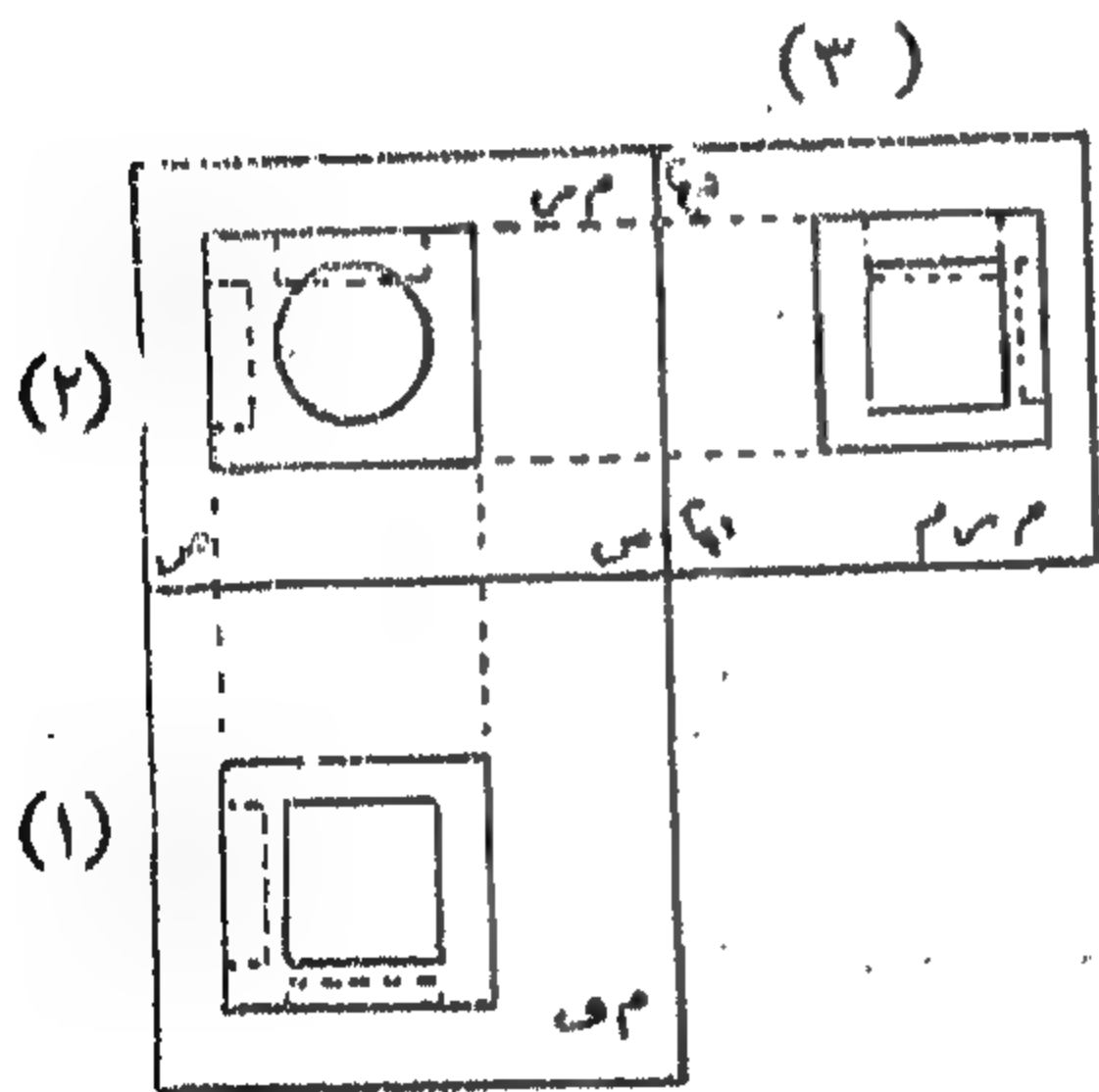


## الفصل الخامس

### في تغيير مستوي المسقط

#### المساقط المساعدة :

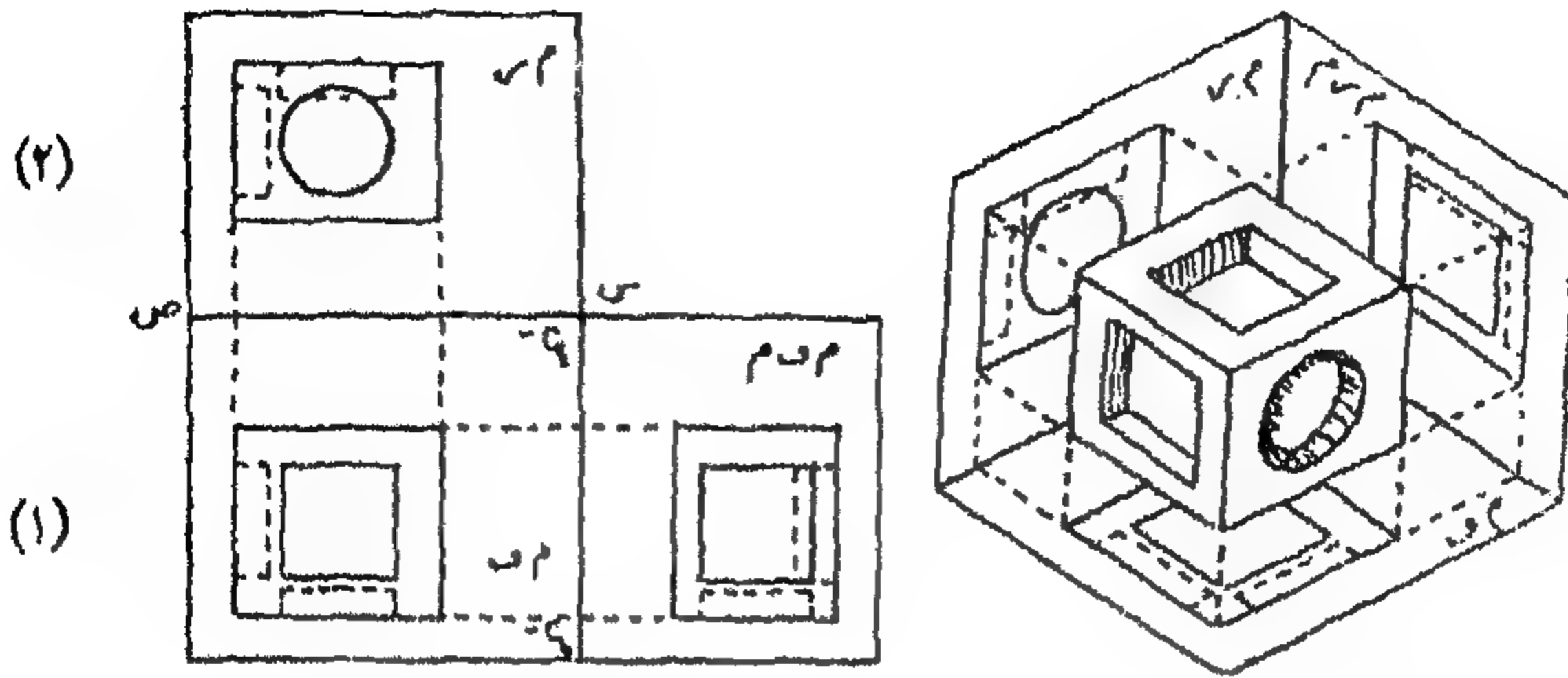
مقدمة — يتعين الشكل الحقيقي لأي جسم عادة بأسقاطه على مستوي المسقط وهما المستوي الأفقي والمستوي الرأسي ولكنه أحيانا لا يكفي لذلك هذان المسقطان فقط فيضاف ليهما مساقط أخرى لزيادة الايضاح في كيفية تكوين الجسم وسهولة تصوره



شكل (٩٩)

فمثلا الشكل (٩٩) يبين المسقط الأفقي (١) والمسقط الرأسي (٢) لجسم منشوري به تجاويف ثلاثة في ثلاثة أوجه من أوجهه ويؤخذ من المسقطين الأفقي والرأسي له أن شكل التجويف العلوي مستطيل وشكل التجويف الأمامي اسطواناني ولكنه لا يفهم منهما شكل

التجويف الجانبي على اليسار اذا كان مستطيلا أو اسطوانيا فبأسقاط الوجه الجانبي الذي به التجويف المذكور على مستو ثالث مواز له يمكننا أن نوضح الشكل الحقيقي لهذا التجويف وقد أخذ هذا المستوي الثالث في حالتنا هذه عموديا على المستوي الأفقي فهو إذا مستو رأسي يطلق عليه «المستوي الرأسي المساعد» ويرمز له بالرمز  $\pi$  م ويتقاطع مع المستوي الرأسي في خط أرض جديد  $\pi$  م ومسقط الجسم عليه يسمى «بالمسقط الرأسي المساعد» وهو المسقط (٣)



شكل (١٠٠)

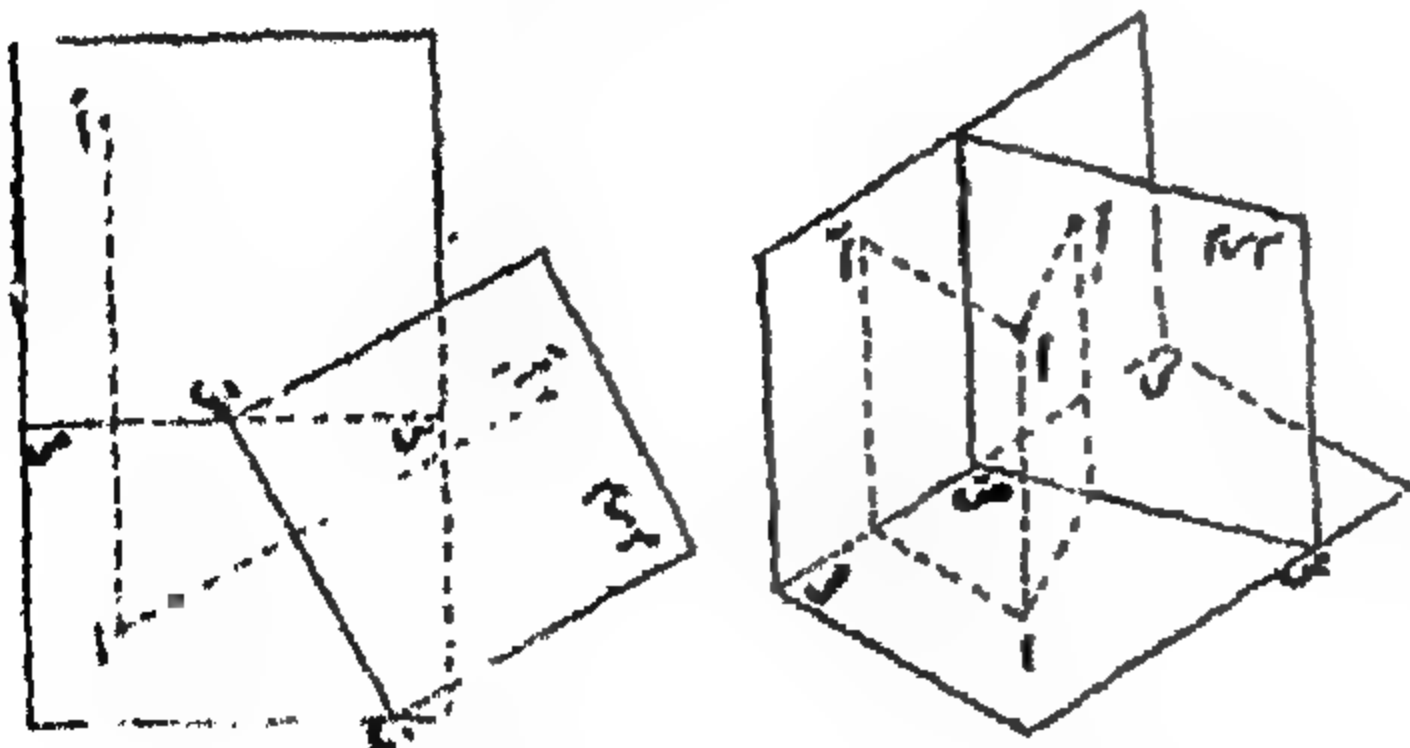
شكل (١٠١) (٣)

والشكل المنظور (١٠٠) يبين المنشور ومساقطه الثلاثة المذكورة (١) و (٢) و (٣) ويسمى المستوى الرأسى المساعد «بالمستوى الجانبي» اذا كان عمودياً على كل من مستويي المسقط ومسقط أى جسم عليه يسمى «بالمسقط الجانبي» ويتقاطع هذا المستوى مع المستوى الرأسى فى خط أرض ثالث س س كما بالشكل فاذا دار هذا المستوى حول خط تقاطعه مع المستوى الاقصى س س حتى انطبق عليه يسمى مسقط الجسم عليه «بالمسقط الاقصى الجانبي» (شكل ١٠١) مرة ٣ واذا دار هذا المستوى حول خط تقاطعه مع المستوى الرأسى س س حتى انطبق على المستوى الرأسى ثم داراً معاً حتى انطبقا على المستوى الاقصى س س يسمى مسقط الجسم عليه «بالمسقط الرأسى الجانبي» شكل (٩٩)

## ٢٢ - المساقط المساعدة للنقطة :

لمعرفة الطرق والقواعد اللازم مراعاتها فى إيجاد المساقط المساعدة لأى سطح أو جسم نبدأ أولاً بمعرفة القواعد الخاصة بالمساقط المساعدة للنقطة

فالشكل المنظور (١٠٢) يبين النقطة أ فى الفراغ ويبين مسقطها الاقصى أ على المستوى الاقصى م م ومسقطها الرأسى أ على المستوى الرأسى م م وفيه س س خط الارض لهذين المستويين



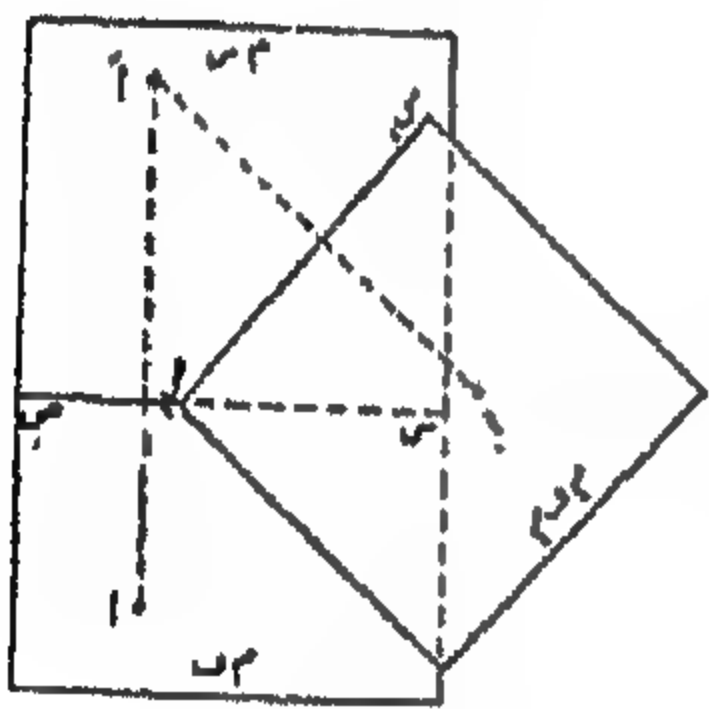
(شكل ١٠٢)

(شكل ١٠٣)

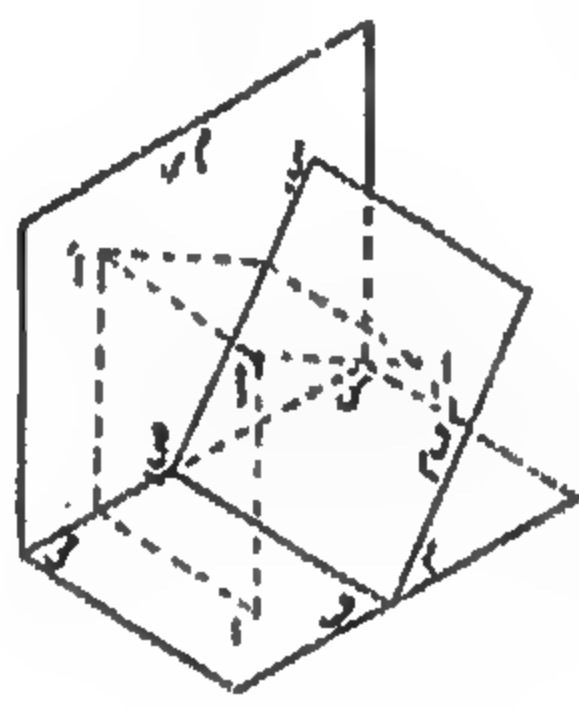


أما  $س س$  فهو خط أرض جديد يتقاطع فيه مستوى رأسي مساعد  $م م$  مع المستوى الأفقي ونقطة  $أ$  هي مسقط النقطة  $ا$  على المستوى الأخير فاذا دار المستوى الرأسي  $م م$  والمستوى الرأسي المساعد  $م م$  كل حول خط تقاطعه مع المستوى الأفقي  $س س$  على التوالي حتى انطبقا على المستوى الأفقي لنتج الشكل (١٠٣) الذي يبين المساقط الثلاثة السابقة الذكر للنقطة  $ا$  بعد الانطباق وأهم شيء يجب ملاحظته في هذا الشكل الأخير هو

اولاً - ان بعد كل من  $أ$  و  $ا$  عن خطي الأرض  $س س$  و  $س س$  على التوالي ثابت وذلك لأن ارتفاع النقطة  $ا$  عن المستوى الأفقي لم يتغير في كلتا الحالتين  
ثانياً - ان الخط الذي يصل  $ا$  و  $أ$  هو مستقيم عمودي على خط الأرض  $س س$  وكذا الخط الواصل من  $ا$  الى  $آ$  هو خط مستقيم عمودي على  $س س$



(شكل ١٠٥)



(شكل ١٠٤)

وفي الشكل المنظور (١٠٤) نري ان النقطة  $ا$  في الفراغ اسقطت على مستوى أفقي  $م م$  وعلى مستوى رأسي  $م م$  وعلى مستوى أفقي مساعد  $م م$  وان  $س س$  هو خط الأرض

بين المستويين الأفقي والرأسي  $س س$  هو خط الأرض الجديد بين المستويين الأفقيين  $م م$  و  $م م$  فاذا دار المستوى الرأسي والأفقي المساعد كل حول خط الأرض  $س س$  على التوالي لنتج الشكل (١٠٥) وفيه الثلاثة مساقط للنقطة  $ا$  وهي مسقطها الأفقي  $ا$  والرأسي  $أ$  والأفقي المساعد  $ا$  وهنا يلاحظ أيضاً :-

اولاً - ان بعد المسقطين الأفقيين  $ا$  و  $أ$  عن  $س س$  و  $س س$  على التوالي ثابت وذلك لأن بعد النقطة  $ا$  عن المستوى الرأسي لم يتغير

ثانياً - أن كل من  $ا$  و  $أ$  عمودي على خط الأرض  $س س$  و  $س س$  على التوالي

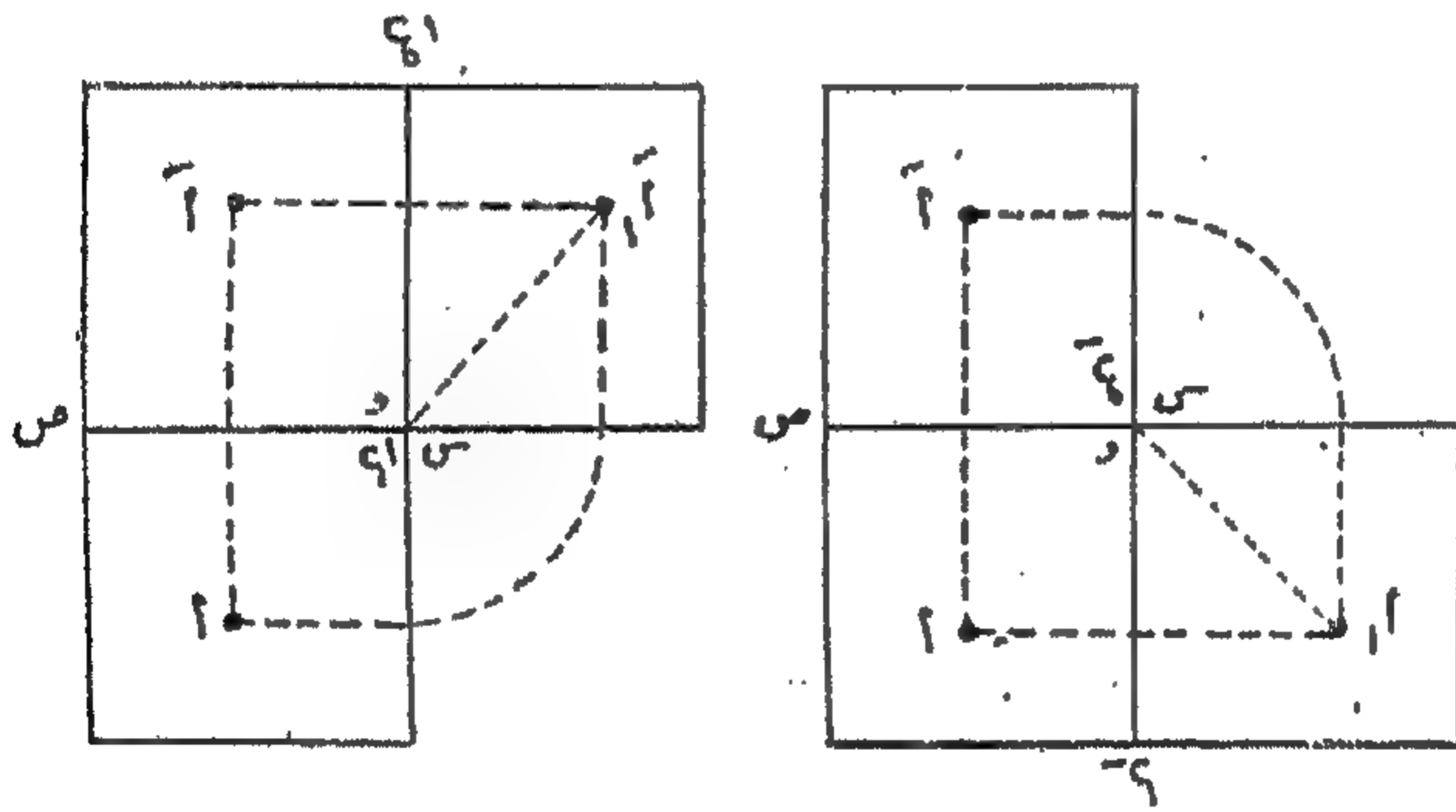
أما اذا كان المستوى الرأسي المساعد أو المستوى الأفقي المساعد عمودياً على كل من مستويي المسقط الاصليين فمسقط النقطة  $ا$  على الاول يقال له المسقط

«الرأسى الجانبي» وعلى الثانى يقال له «المسقط الافقى» الجانبي لتلك النقطة والشكل (١٠٧) يبين مساقط النقطة ١ الثلاثة فى الحالة الاولى وهى الاكثر استعمالاً والشكل (١٠٦) يبين مساقطها الثلاثة ايضاً فى الحالة الثانية وواضح بكل شكل أولاً طريقة رسم المسقط الجانبي لنقطة معلوم مسقطها الافقى والرأسى وثانياً طريقة إيجاد بعدها الحقيقى عن خط الارض  $س س$  فى الفراغ وهو  $١$  و  $١'$  و  $١''$  و

وعلى الطالب فحص الاشكال من (١٠٢) الى (١٠٧) وتطبيق القواعد الآتية عليها وهى

أولاً — ان المسقط الافقى والرأسى للنقطة يقعان على خط مستقيم عمودى على خط الارض

ثانياً — انه اذا اسقطت عدة مساقط رأسية من مسقط افقى واحد فان مسافات تلك المساقط الرأسية ثابتة كل عن خط الارض المقابل له



(شكل ١٠٧)

(شكل ١٠٦)

ثالثاً — انه اذا أسقطت عدة مساقط أفقية من مسقط رأسى واحد فان مسافات ثابتة كل عن خط الارض المقابل له

### ٢٣ — المساقط المساعدة للخط المستقيم والسطح والجسم

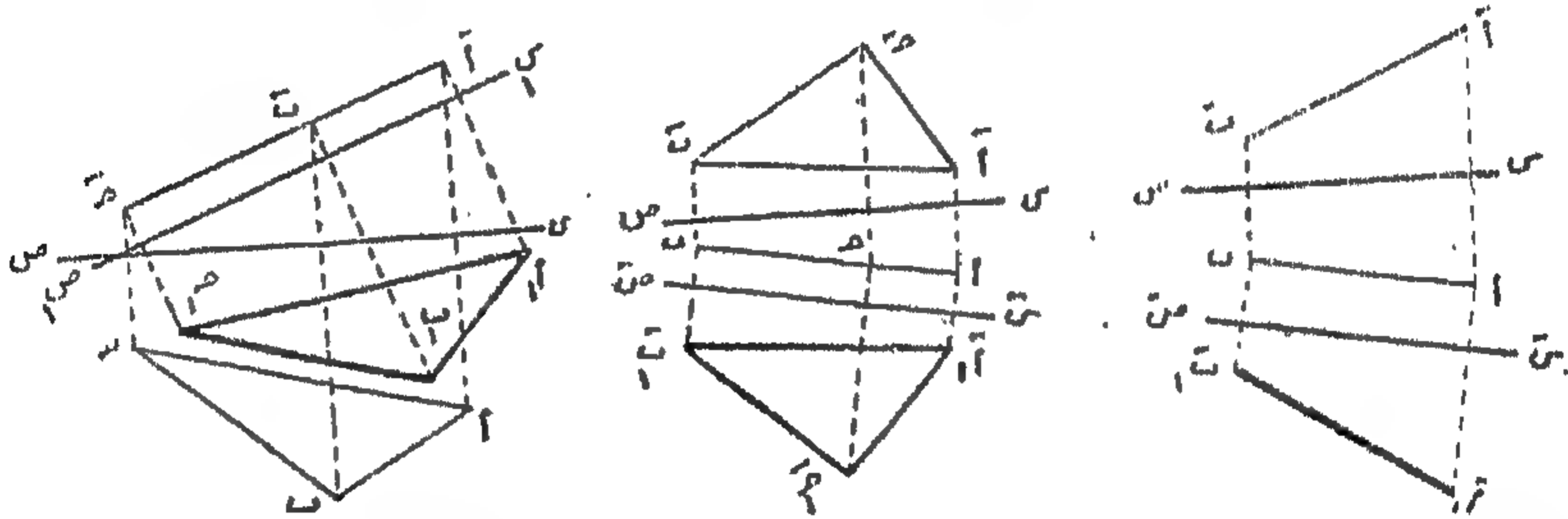
من القواعد السابقة فى المساقط المساعدة للنقطة يمكننا أن نرسم المساقط المساعدة للخط المستقيم وذلك برسم المساقط المساعدة لنقطتين منه ورسم المساقط

المساعدة لسطح ترسم المساقط المساعدة لنقط تقاطع الخطوط التي تحدده ولرسم المساقط  
لمساعدة لجسم ترسم المساقط المساعدة لرؤوسه

وتستعمل المساقط المساعدة أيضاً في احوال كثيرة منها

أولاً -- إيجاد الطول الحقيقي لخط مستقيم معلوم مسقطاه كما هو مبين بمثال (١)  
ثانياً -- إيجاد الشكل الحقيقي لسطح معلوم مسقطاه أيضاً كما هو مبين بمثال  
(٢) و (٣)

ثالثاً -- إيجاد مسطبتين افقي ورأسى لأى جسم بشروط معينة يصعب على  
الطالب رسمها بدون استعمال المستويات المساعدة كما هو مبين بمثال (٤) و (٥) و (٦)  
مثال ١ -- الشكل (١٠٨) يبين المسقط الافقى والرأسى للخط  $AB$  ويبين



(شكل ١١٠)

(شكل ١٠٩)

(شكل ١٠٨)

المسقط الرأسى المساعد له على المستوى  $MM$  موازى لمسقطه الافقى ومأخوذ ابعاده  
مسقطه المساعد هذا عن خط الارض  $SS$  من  $MM$  من ابعاده مسقطه الرأسى عن  $SS$  من كل  
لنظيره وهذا المسقط لا بد اذاً وان يكون مساوياً للطول الحقيقى للخط  $AB$

مثال ٢ -- الشكل (١٠٩) يبين المسقط الافقى والرأسى لمثلث  $ABC$  الموجود

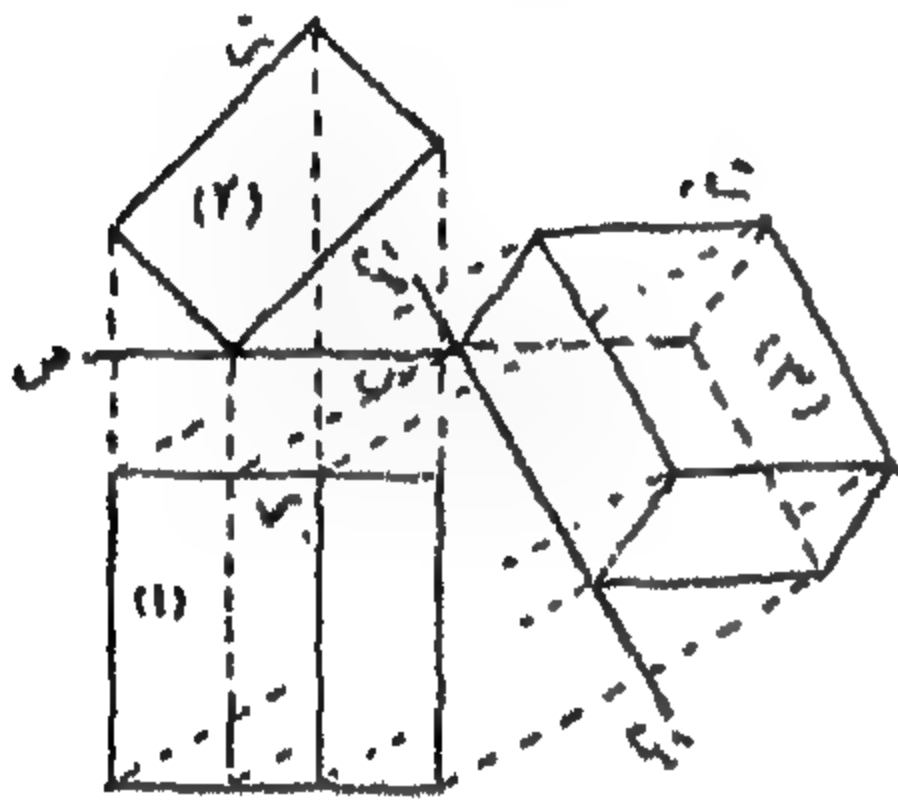
في مستوى رأسى ويبين أيضاً مسقطه على مستوى رأسى مساعد مواز لمستوى المثلث  
ومأخوذة ابعاده هذا المسقط عن خط الارض الجديد  $SS$  من  $MM$  من ابعاده المسقط الرأسى  
الاصلى عن  $SS$  على التناظر وهذا المسقط المساعد هو الشكل الحقيقى للمثلث المذكور

مثال ٣ -- والشكل (١١٠) يبين المسقط الافقى والرأسى لمثلث  $ABC$  ح

الموجود في مستوى عمودى على الرأسى مسقوط على مستوى افقى مساعد مواز

لمستوى المثلث وأخذت أبعاد مسقطه الأخير عن خط الأرض  $s_1$  من الأبعاد المناظرة لها في المسقط الأفقي الأصلي كل لنظيره وهذا المسقط هو الشكل الحقيقي للمثلث أيضاً

مسألة ٤ - الشكل (١١١) يبين المسقط الأفقي (١) والمسقط الرأسى (٢) المنشور قائم ويبين مسقطاً رأسياً مساعداً لنفس المنشور على خط أرض جديد



(شكل ١١١)

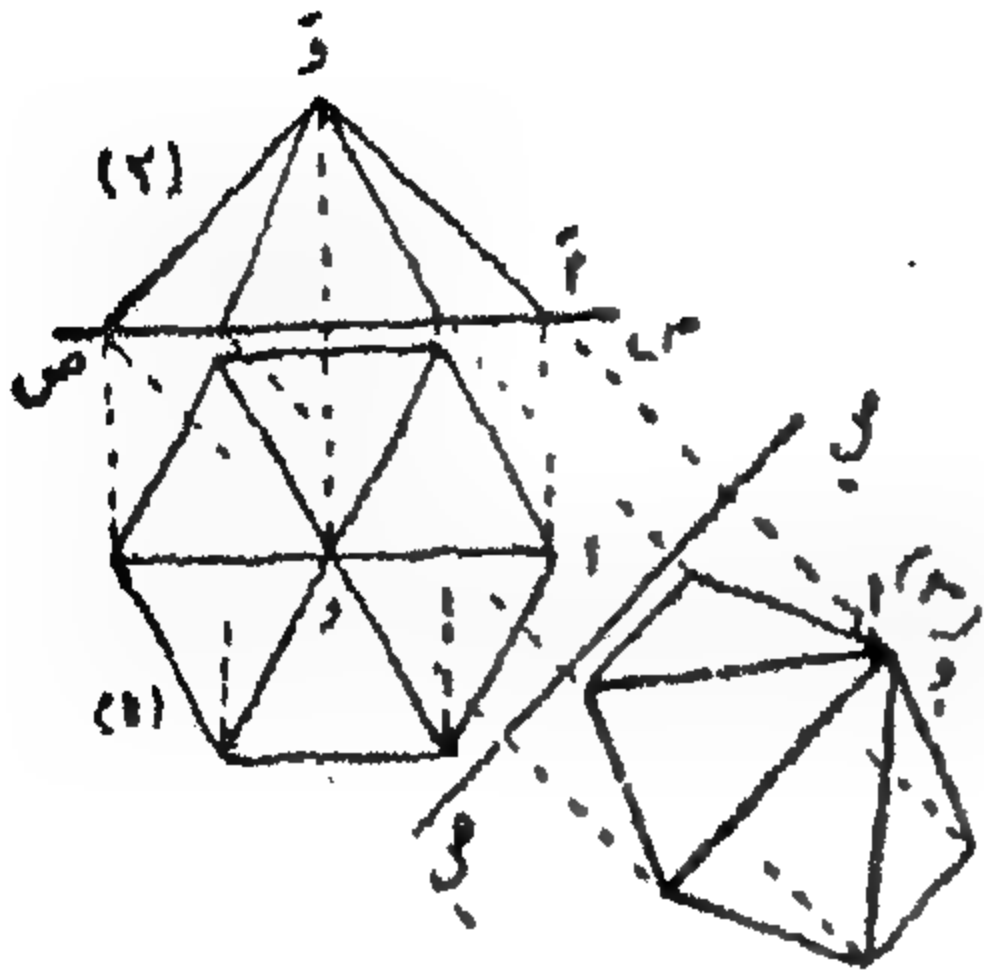
$s_1$  ص وبه أحد احرف المنشور منطبقاً على المستوى الأفقي. وهذا المسقط مأخوذة أبعاده من أبعاد المساقط الرأسية الأصلية لرؤوسه فمثلاً من المسقط الأفقي  $r_1$  والمسقط الرأسى  $r_2$  لأحد رؤوسه (١) رسم المسقط الرأسى المساعد  $r_3$  لهذه الرأس باسقاط عمود من  $r_1$  على خط الأرض  $s_2$

وامتداده الى  $r_3$  بحيث يكون بعد  $r_3$  عن  $s_2$  هو نفس بعد  $r_1$  عن  $s_1$  وعلى هذه الطريقة رسمت المساقط الرأسية المساعدة لباقي رؤوسه

مسألة ٥ - ليكن المثلث  $r_1$  رسم مسقطى أى جسم عند ما يكون حرف أو خط معين فيه رأسياً

العمل - يرسم أولاً المسقط الأفقي والرأسى لهذا الجسم فى أبسط أوضاعه بحيث يكون الحرف أو الخط المذكور موازياً للمستوى الرأسى أى مسقطه الأفقى موازياً لخط الأرض

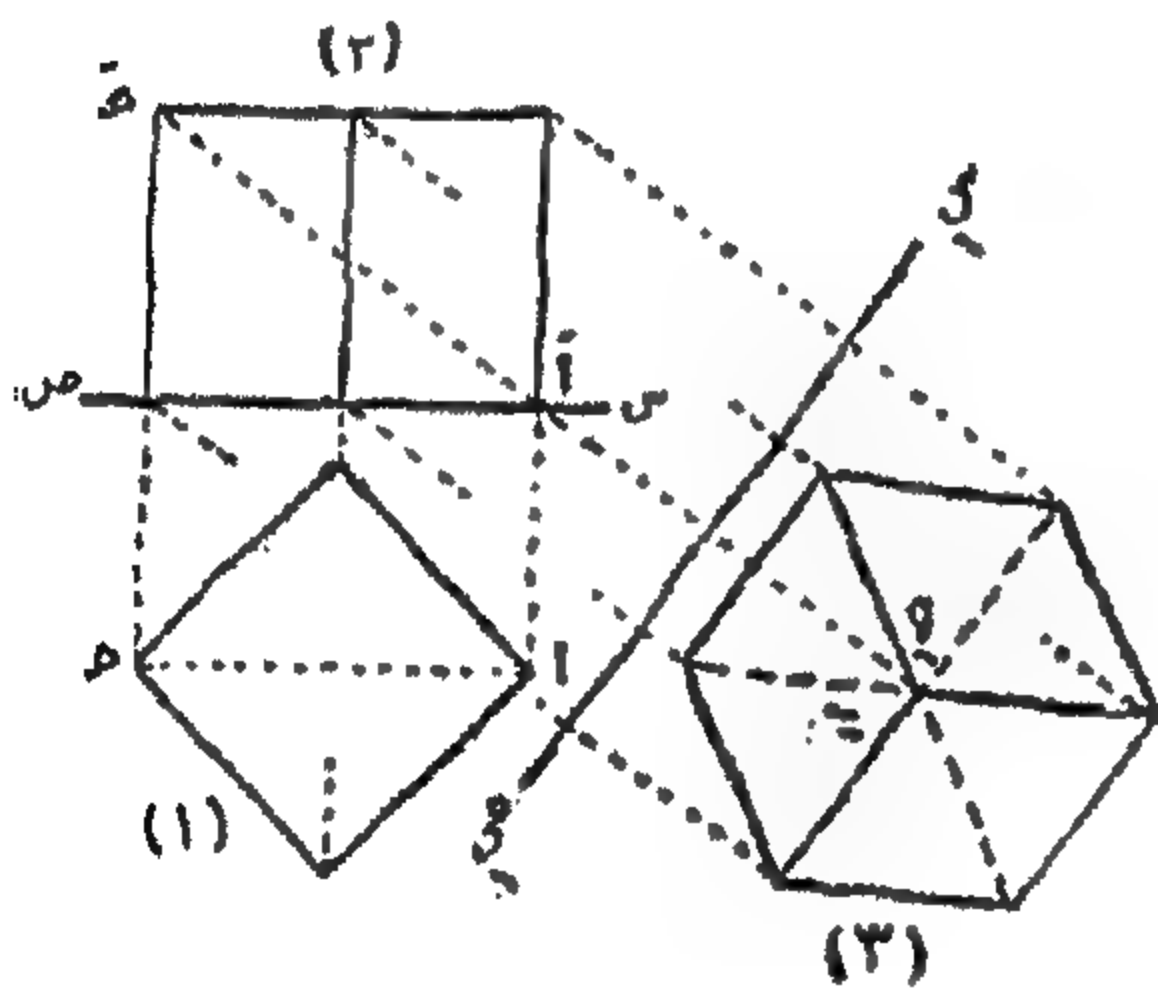
ثم يؤخذ خط أرض جديد عمودى على المسقط الرأسى لهذا الحرف ويرسم للجسم مسقطاً أفقياً مساعداً تؤخذ أبعاده من المسقط الأفقى الأصلي لهذا الجسم فيكون المسقط الرأسى الأصلي للجسم مع مسقطه الأفقى المساعد هما المسقطان المطلوبان



(شكل ١١٢)

فالشكل (١١٢) يبين طريقة رسم مسقطي هرم سداسي عندما يكون أحد أحرفه  $a$  و رأسها  $o$  وقد وضع الجسم بقاعدته على المستوى الأفقي بحيث يكون الحرف  $a$  و موازيا للمستوى الرأسى أو بمعنى آخر مسقطه الأفقى او موازيا لخط الأرض وهذا الوضع أبسط أوضاع الجسم بالنسبة لمستوي المسقط.

ثم رسم خط أرض جديد  $o_1$  عموديا على  $o_1$  و المسقط الرأسى للحرف  $a$  و ومن المسقط الرأسى للهرم اسقط على  $o_1$  مسقطا أفقى مساعد (٣) بالطريقة السابقة شرحها فصار المسقطان (١) و (٢) هما المسقطان المطلوبان



(شكل ١١٣)

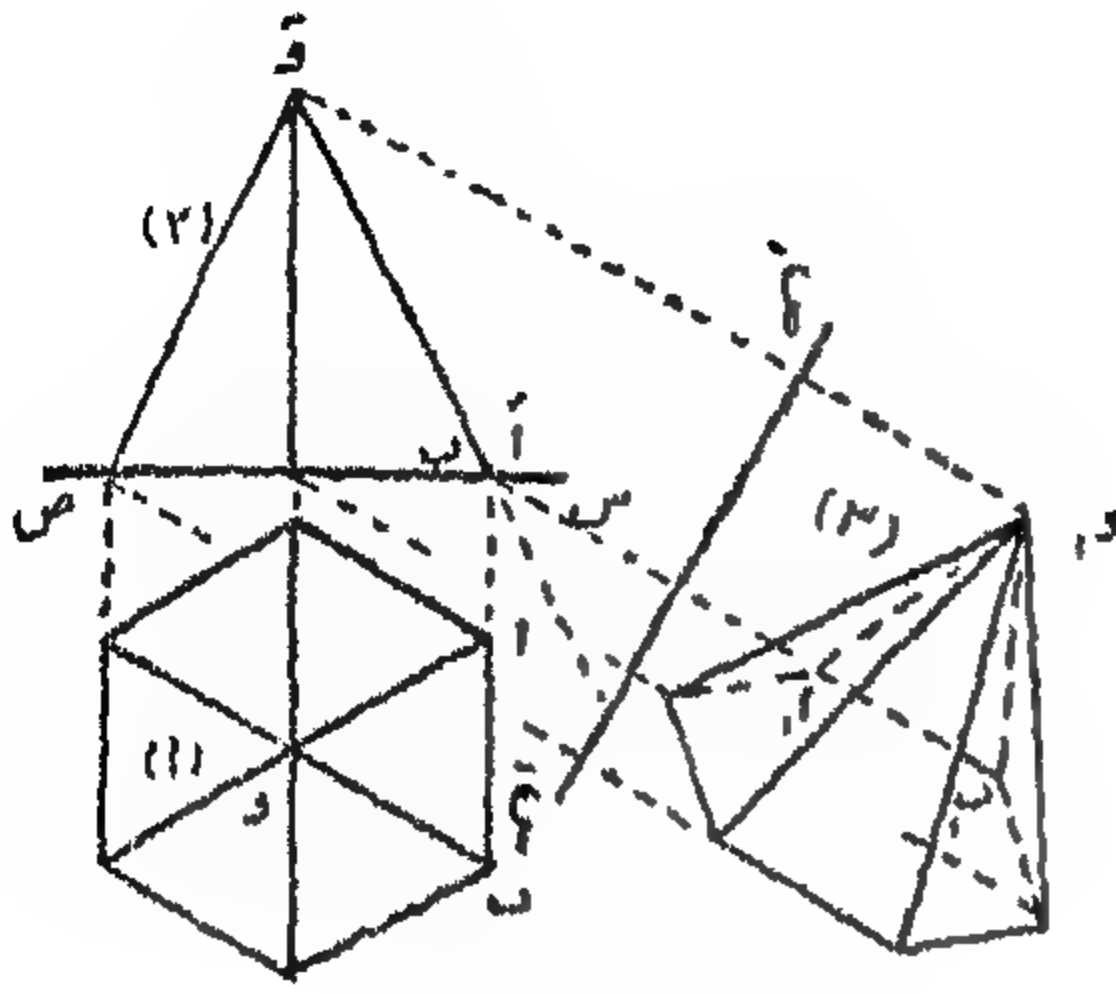
والشكل (١١٣) يبين المسقط الأفقى (١) والمسقط الرأسى (٢) المكعب فى أبسط أوضاعه ومن المسقط الرأسى (٢) اسقط المسقط الأفقى المساعد (٣) على خط أرض جديد  $o_1$  عمودى على المسقط

الرأسى لأحد أقطار المكعب ثم أ فصار المسقط (٢) والمسقط (٣) يمثلان المكعب عندما يكون أحد أقطاره  $a$  عموديا على المستوى الأفقى

مثال ٦ — وعندما يراد رسم مسقطى جسم ما بحيث يكون خط أو وجه معين

فيه بميل بزاوية معلومة على المستوى الأفقى تعمل نفس الطريقة السابقة بحيث يكون خط الأرض الجديد مائلا على المسقط الرأسى لهذا الخط أو الوجه بالزاوية المعلومة ويؤتى بمسقطه الأفقى المساعد بعد ذلك كما تقدم





(شكل ١١٤)

والشكل (١١٤) يبين المسقط الافقي  
(١) والمسقط الرأسى (٢) والمسقط الافقى  
المساعد (٣) لهرم سداسى يميل احد اوجوهه  
و  $\theta$  بالزاوية  $\theta$  وفيه رسم المسقطان  
(١) و (٢) وهو فى ابسط اوضاعه وبحيث  
كان احدا لأوجه و  $\theta$  عموديا على المستوى  
الرأسى أى ان مسقطه الرأسى عليه و  $\theta$

خط مستقيم ثم أخذ خط الارض  $\theta$  يميل بالزاوية  $\theta$  على و  $\theta$  وبعد ذلك اسقط  
المسقط (٣) بالطريقة المتقدمة

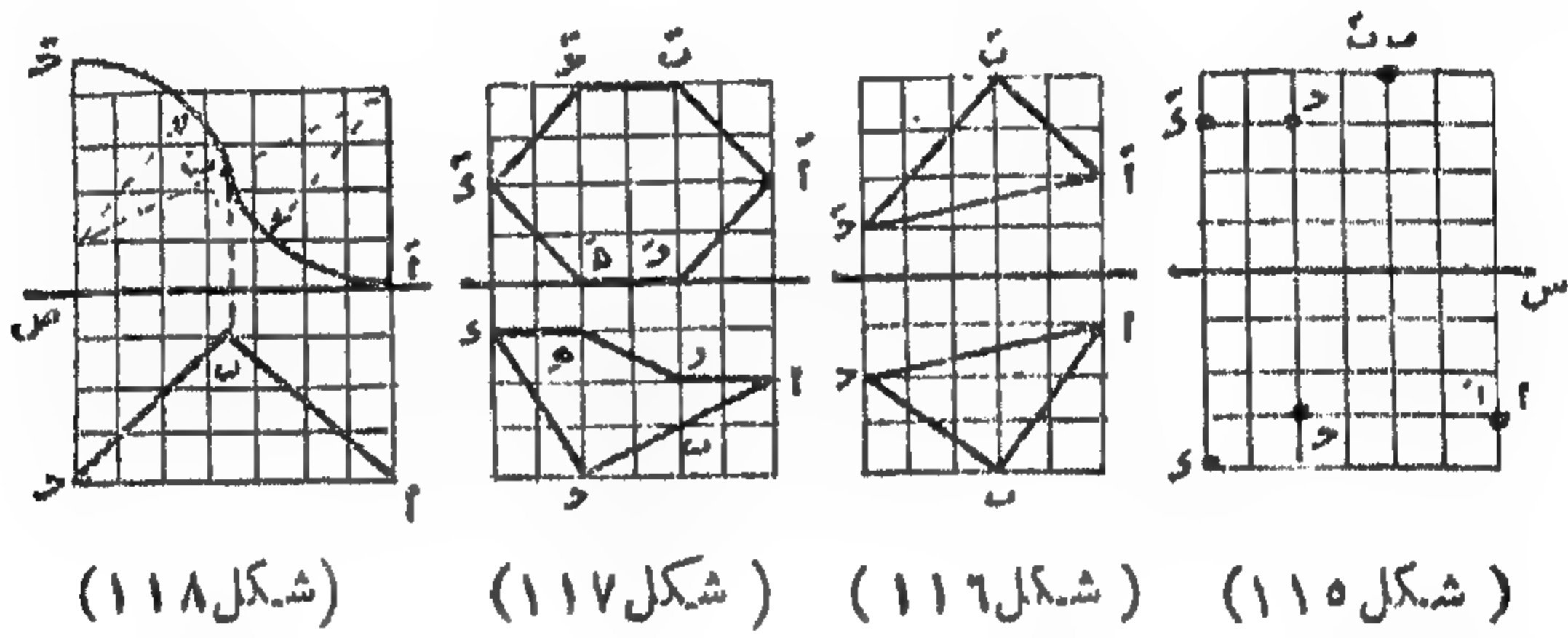
والاشكال من (١٠٨) الى (١١٤) توضح كيفية ايجاد المساقط المساعدة  
لخط و سطح وجسم على التوالى ويمكن فهمهما بمجرد النظر اليها فلاداع لشرحها وسيأتى  
الكلام بعد ذلك على استعمال المستويات المساعدة فى ايجاد الاشكال الحقيقية  
لقطاعات الاجسام النخ



## (تمرين ٣)

## على المساقط المساعدة والجانبية في الباب الخامس

(١) ارسم المساقط الرأسية المساعدة لكل من النقط المبين مساقطها الافقية الرأسية في شكل (١١٥) على خط ارض يميل بزاوية  $60^\circ$  مع خط الارض س س



واذكر القواعد الاساسية التي لابد من ملاحظتها اثناء العمل

(٢) ارسم المساقط الجانبية الرأسية لنفس النقط المبينة في الشكل السابق بحيث يبعد كل منها عن المستوى الجانبي بمقدار ٢ سم ومنها أوجد البعد الحقيقي لكل نقطة عن خط الارض س س في الفراغ

(٣) الشكل (١١٦) يبين مسقطي مثلث في الفراغ والمطلوب رسم مسقط رأسى مساعد لهذا المثلث على خط ارض يوازي س س ثم إيجاد مسقطه الرأسى الجانبي ومسقطه الاقنى الجانبي على مستوى جانبي يبعد بمقدار ١ سم م عن الرأس ١

(٤) الشكل ١ س ه و (وهو ليس بسطح مستو) مبين مسقطاه بشكل (١١٧) والمطلوب رسم مسقطه الرأسى المساعد على خط ارض يوازي س س ومسقطه الاقنى المساعد على خط ارض يوازي د ه

(٥) ارسم المسقط الجانبي للخطين المنحنيين المتصلين ببعضهما ومبين مسقطاهما في شكل (١١٨)

ملاحظة — عند تمثيل المربعات الموجودة في الاشكال من (١١٥) الى (١١٨) يؤخذ ضلع المربع ١ س م

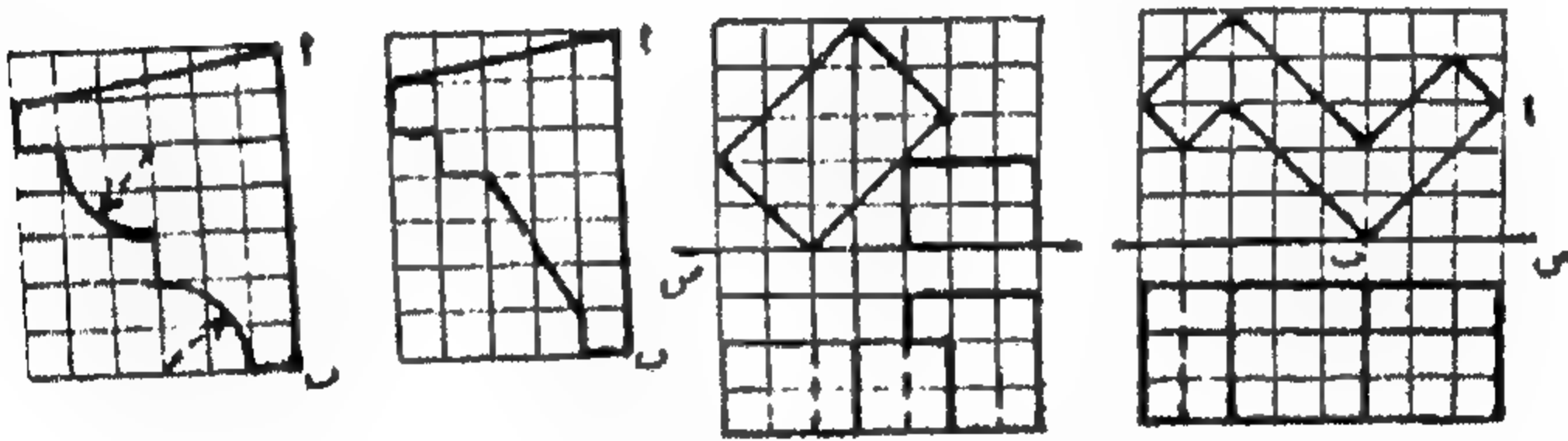
(٦) ارسم المسائط الثلاثة الأفقية والرأسية والجانبية للنقط المذكورة بتطبيق (٢) تمرينات نمرة ١ صفحة (٤٠)

(٧) منشور ثماني منتظم قائم طول ضلع كل من قاعدتيه المثلثة هو ٣ س م وارتفاعه ٦ س م يرتكز بوجهه من أوجهه المستطيلة الجانبية على المستوى الأفقي وتميل قاعدته على المستوى الرأسى بزاوية  $45^\circ$  اوجد مسقطه الرأسى والأفقى في هذا الوضع

(٨) ارسم المسقط الأفقى والرأسى لجسم كثير السطوح ذى الثمانية الأوجه المنتظم عندما يكون أحد أوجهه المثلثية افقياً ويبعد ١ س م عن المستوى الأفقى

(٩) ارسم المسقط الأفقى والرأسى لمخروط قطر قاعدته ٤ س م وارتفاعه ٦ س م عند ما تميل قاعدته على المستوى الرأسى بزاوية  $30^\circ$

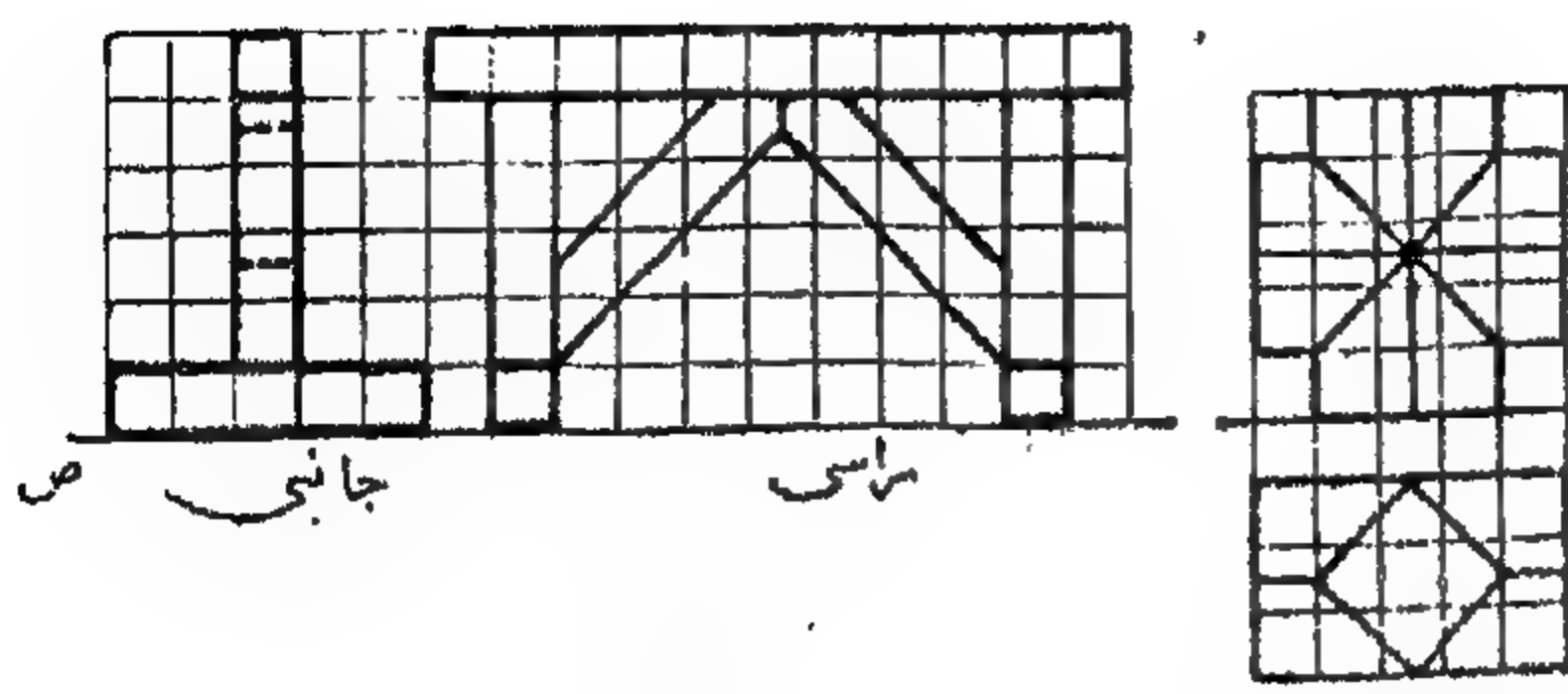
(١٠) الشكل (١١٩) يبين جسم مكون من كوعين قائمى الزاوية والمطلوب إيجاد المسقط الرأسى والأفقى لهذا الكوع عند ما تكون قاعدته اب افقية



(شكل ١١٩) (شكل ١٢٠) (شكل ١٢١) (شكل ١٢٢)

(١١) الشكل (١٢٠) يبين منشورين قائمين يرتكز احدهما على الآخر والمطلوب إيجاد المسقط الجانبى لهما معاً

(١٢) الشكلان (١٢١) و (١٢٢) يبينان حليتين تركبان فى المباني على حائط رأسى مواز للخط اب والمطلوب إيجاد المسقط الأفقى لكل منهما بطول يساوى ثلاث مربعات عمودى على مستوى الورقة ثم إيجاد المسقط الجانبى لهما أيضاً



(١٣) الشكل (١٢٣)

يبين جسم مكون من

منشورين رباعيين متقاطعين

ارسم المسقط الرأسى لهذا

الجسم على خط ارض يميل

٦٠° مع خط الارض س س

(شكل ١٢٤)

(شكل ١٢٣)

(١٤) ارسم الجسم السابق فى شكل (١٢٣) عند ما يكون احد قواعده الاربعية

مائلًا على المستوى الافقى بزاوية ٣٠°

(١٥) الشكل (١٢٤) يبين المسقط الجانبي والرأسى لجسم والمطلوب رسم المسقط

الافقى لهذا الجسم

ملاحظة : كل المربعات التى بالاشكال السابقة يؤخذ طول ضلع كل منها ١ س س



## الفصل السادس

في المستويات الفراغية بالنسبة لمستوى المسقط

٢٤ — تمثيل المستويات في الفراغ بالنسبة لمستوى المسقط

يمثل أى مستوى في الفراغ بخطى تقاطعه مع مستوى المسقط ويسمى خط تقاطع أى مستوى في الفراغ مع المستوى الرأسى بالاثـر الرأسى وخط تقاطعه مع المستوى الافقى بالاثـر الافقى فيتمين اذاً المستوى بمعلومية اثـرية الرأسى والافقى وخط تقاطع أى مستوى مع مستوى آخر يسمى باثـره على ذلك المستوى وانما يقصد عادة بكلمة اثـر المستوى في الهندسة الوصفية أنه خط تقاطع أى مستوى مع أحد مستويي المسقط .

ملاحظة : — يحتوى اثـر أى مستوى على اثـرات جميع الخطوط المرسومة فيه لان اثـر أى خط مستقيم هو نقطة تقاطعه (تقابله) مع أحد مستويي المسقط فاذا وجد هذا المستقيم في أى مستوى لابد من وجود اثـرية على خطى تقاطع مستوييه بمستويي المسقط أى على اثـرى هذا المستوى

٢٥ — اوضاع المستوى بالنسبة لمستوى المسقط

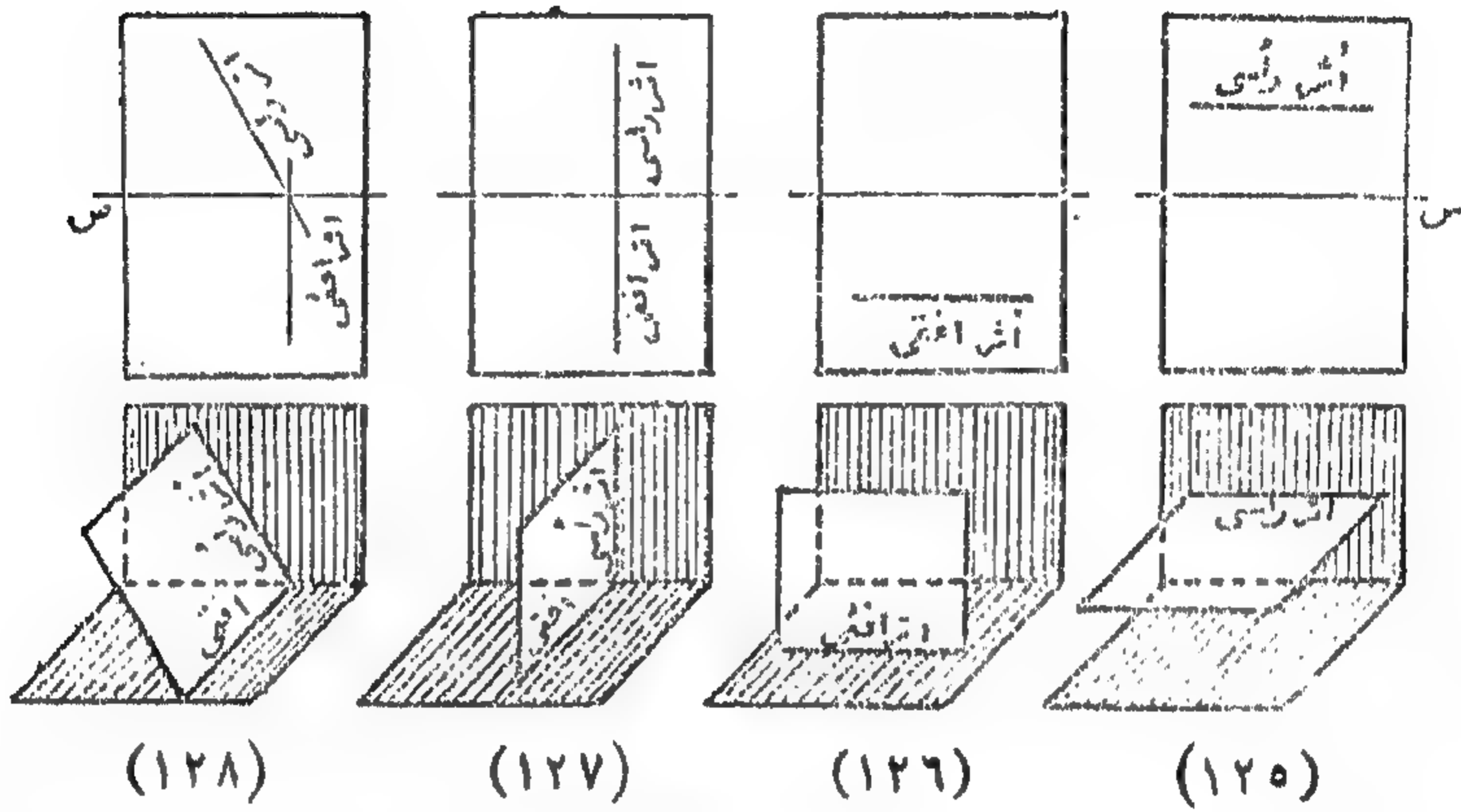
تبيين الاجزاء السفلى المنظورة في الاشكال من نمرة ١٢٥ الى نمرة ١٣٣ مستويات تشغل مواضع مختلفة في الفراغ بالنسبة لمستويي المسقط وتبين الاجزاء العليا منها تمثيل تلك المستويات بواسطة اثـرى كل منهما على مستويي المسقط بعد انطباقهما على بعضهما .

فالشكل (١٢٥) يبين مستويًا موازيًا للمستوى الافقى وعمودياً على المستوى الرأسى فيكون «افقياً» وهذا ليس له الا اثـر رأسى مواز لخط الارض

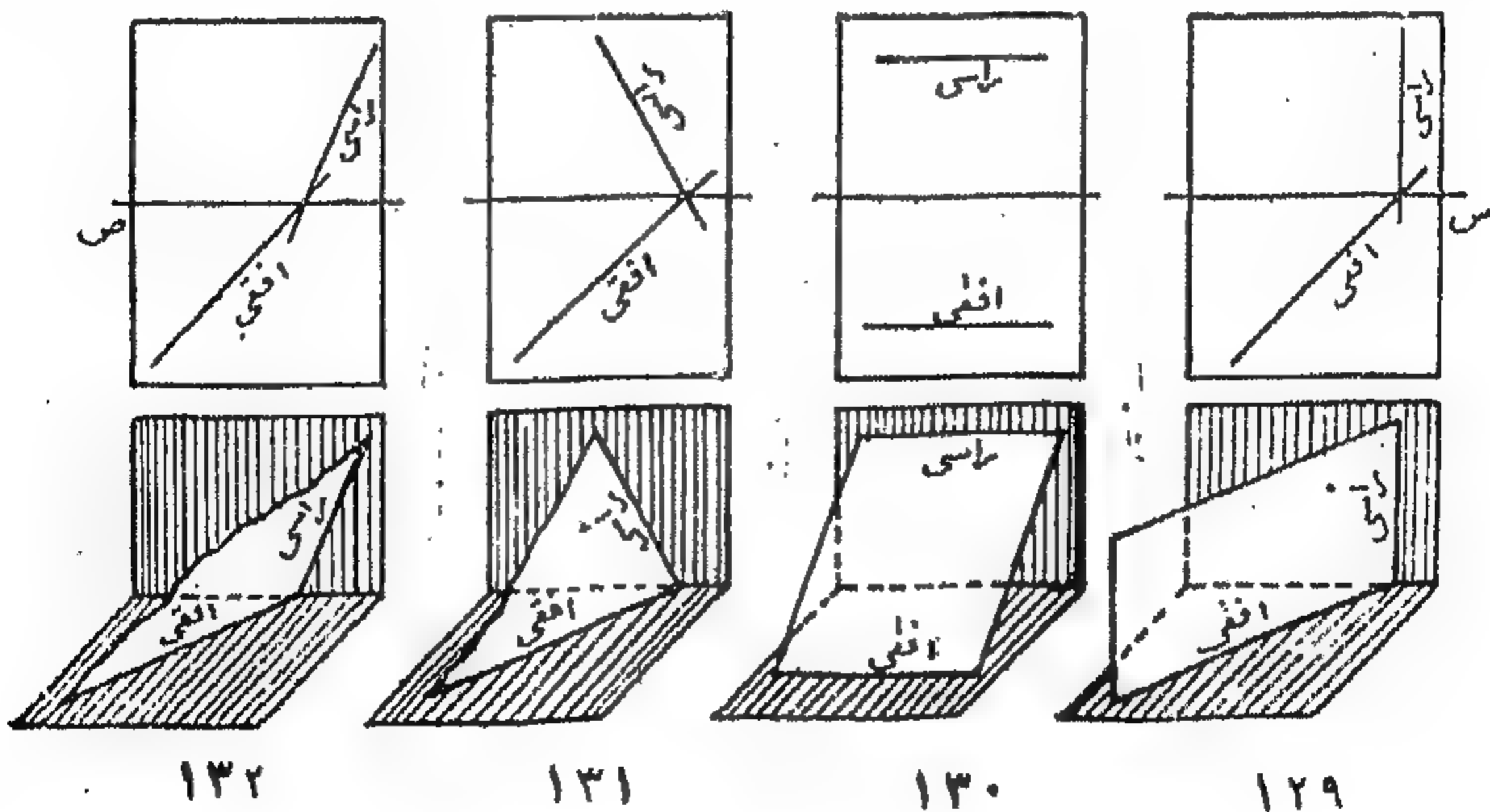


وشكل ١٢٦ يبين مستويًا موازيًا للمستوى الرأسى وعمودياً على المستوى الافقى فيكون « رأسياً » وهذا ليس له الاثر افقى مواز لخط الارض  
 وشكل ( ١٢٧ ) يبين مستويًا متعامداً على كل من مستويي المسقط فيكون « عمودياً على خط الارض » ويكون اثره على استقامة واحدة وعموديين على خط الارض

### أشكال

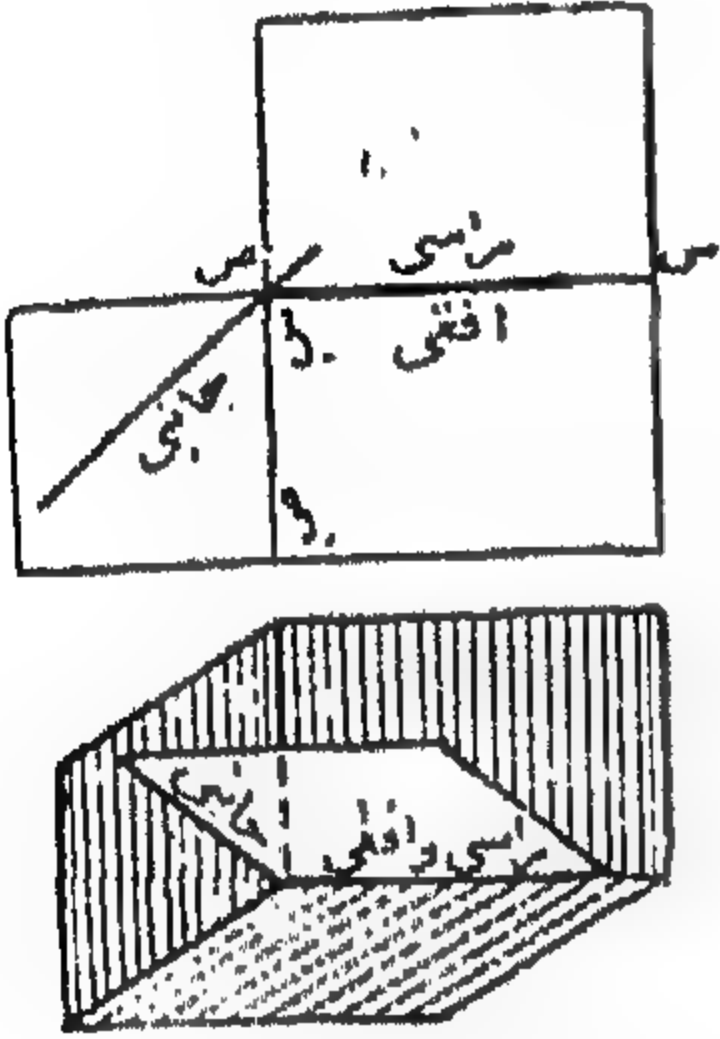


وشكل (١٢٨) يبين مستويًا مائلًا على المستوى الافقى وعمودياً على المستوى الرأسى وهذا يميل أثره الرأسى على خط الارض ويكون أثره الافقى عمودياً عليه  
 وشكل (١٢٩) يبين مستويًا عمودياً على المستوى الافقى ومائلًا على المستوى الرأسى وهذا يكون أثره الافقى مائلًا على خط الارض وأثره الرأسى متعامداً عليه



وشكل (١٣٠) يبين مستويًا مائلًا على كل من مستويي المسقط وموازياً لخط الأرض وهذا يكون اثره الرأسى والافقى متوازيين وموازيين لخط الأرض وشكلاً (١٣١) و (١٣٢) يبينان مستويين مائلين على مستويي المسقط وعلى خط الأرض ويقال لهما مستويين « اختياريين » ومثل كل من هذين المستويين يكون كل من اثره الرأسى والافقى مائلًا على خط الأرض

وشكل (١٣٣) يبين مستويًا محتويًا على خط الأرض ومائلًا على كل من مستويي المسقط وهذا يكون اثره منطبقين على خط الأرض وفي هذه الحالة لا يتعين مثل هذا المستوى تماماً بمعلومية اثرية على مستويي المسقط فقط وإنما يلزم ذكر اورسم اثر ذلك المستوى على مستوى جانبي كما هو موضح بالشكل :



(شكل ١٣٣)

**والمستوى العمودى** - يطلق على كل مستوى متعامد على أحد مستويي المسقط او على كليهما معاً كما بالاشكال الخمسة الاولى من ١٢٥ الى ١٢٩ .

**والمستوى المائل** - يطلق على كل مستوى يميل على كل من مستويي المسقط معاً . كما بالاشكال من ١٣٠ الى ١٣٣

ومن الواضح في الاشكال السابقة لوضع المستوى في الفراغ انه .  
أولاً - اذا تقاطع الاثران لاي مستوى فاما يتقاطعان على خط الأرض في نقطة واحدة وذلك لان نقطة تقاطع الاثرين لا بد وان تكون في كل من مستويي المسقط وهذا لا يمكن الا بوجودها على خط الأرض .

ثانياً - واذا لم يتقاطعا الاثران فانها يوازيان خط الأرض او ينطبقان عليه .  
كما بشكل ١٣٠

ثالثاً - انه يكفي لتحديد اثرى أى مستوى اما أحد اثره ونقطة على اثره الآخر واما نقطتين على كل من اثره .

وينتج من الثلاث نقط المتقدمة ومما ذكر في نتيجة ٢ النظرية الثانية من الهندسة الفراغية صفحة ٦٦ أنه يتعين المستوى الفراغى أما بمستقيمين متقاطعين ومتوازيين وأما بمستقيم ونقطة خارجة عنه وأما بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لانه فى كل حالة من تلك الاحوال يمكن تعيين خطين فى هذا المستوى ويمكن تعيين اثرى هذين الخطين فيعلم نقطتين على كل اثر من اثرى المستوى وبهذا يتعين الاثران أو بمعنى آخر يتعين المستوى .

مسألة ١٨ — تعيين أثرى مستوى محتوى على ثلاثة نقط ليست على

استقامة واحدة

المفروضه — ان الثلاث نقط  $A, B, C$  ليست على استقامة واحدة وان

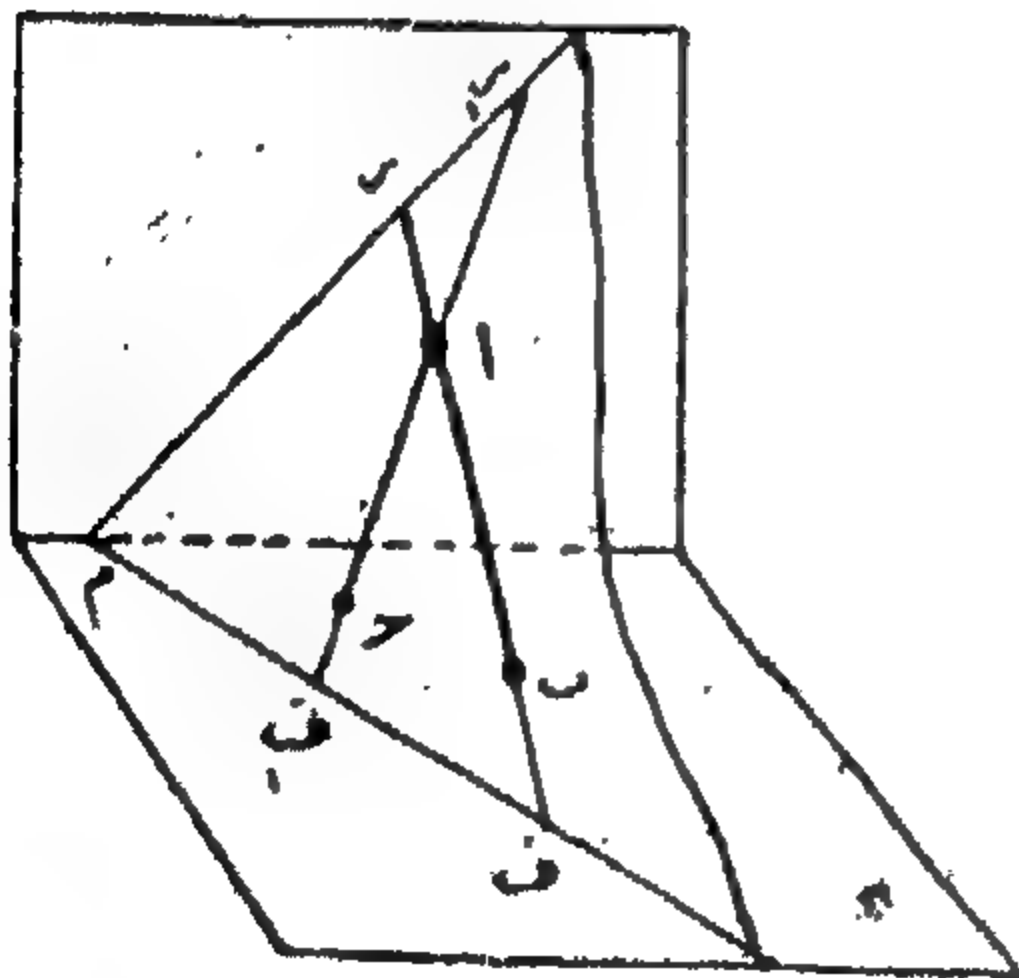
$A, B, C$  هي مساقطها الافقية و  $A', B', C'$  هي مساقطها الرأسية على التوالى شكل ١٣٤

والمطلوب — تعيين اثرى المستوى المحتوى على الثلاث نقط  $A, B, C$  .

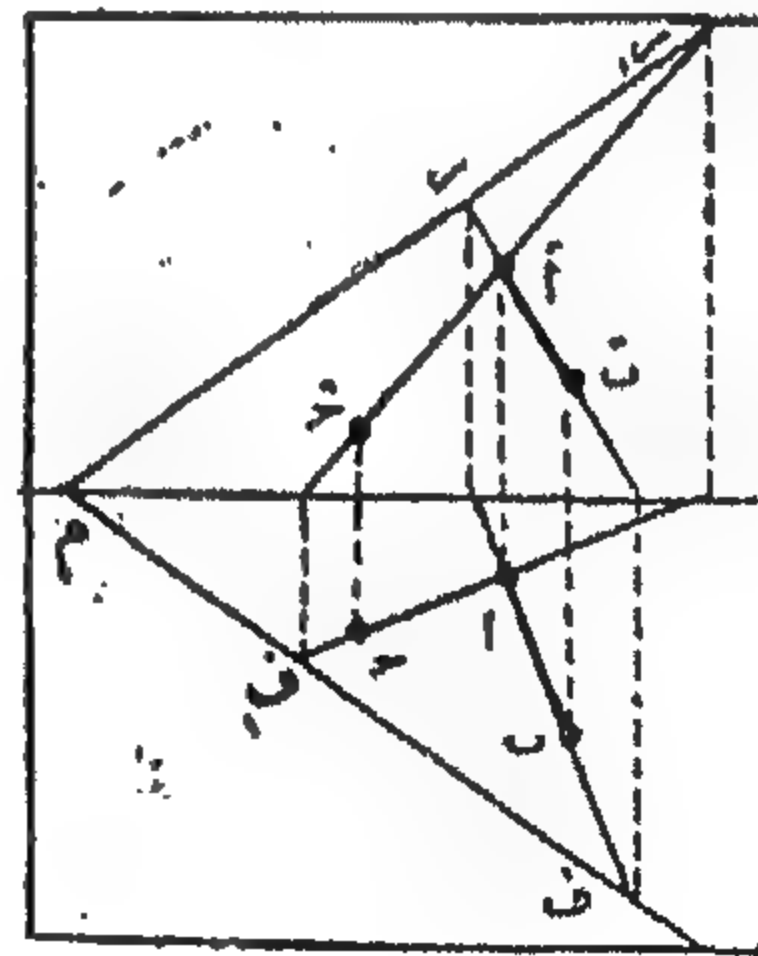
العمل — نصل  $A, B$  و  $A', B'$  فيتكون مسقطا الخط  $AB$

ثم نجد اثرى الخط  $AB$  بالطريقة المتقدمة فى مسألة ٢ بالصفحة ٣٣ ولتكن النقطتان  $M, N$  هما الاثران الرأسى والافقى لهذا الخط .

ونصل  $A, C$  و  $A', C'$  فيتكون مسقطا الخط  $AC$



(شكل ١٣٥)



(شكل ١٣٤)

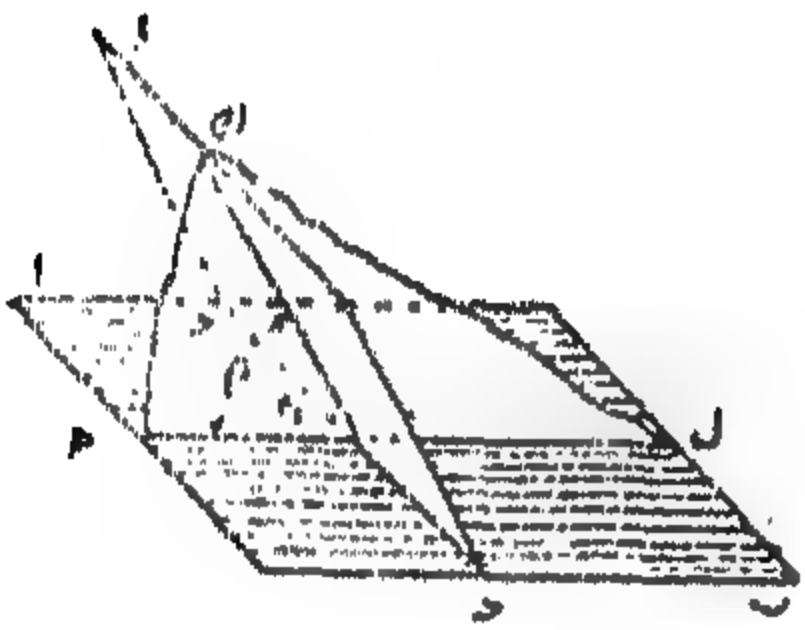
ثم نجد اثرى الخط  $AC$  حولتسكن النقطتان  $M, N$  هما الاثران الرأسى والافقى لهذا الخط فيكون الخط  $MN$  هو الاثر الرأسى للمستوى و  $MP$  هو اثره الافقى ويتقابل

الاثران على خط الارض في نقطة مثل م وهو المطلوب .  
والشكل المنظور ١٣٥ يبين ما توضح

البرهان — الثلاث نقط ا ب ح في مستو واحد فرضاً فيكون الخطان ا ب و ا ح في هذا المستوى ويكون اثراهما على اثرى ذلك المستوى أى ان نقطتي م م من نقط الاثر الرأسى للمستوى وكذا ف و ف م من نقط الاثر الافقى له وهو المطلوب .  
ملاحظة — لابد وان يقع اثر الخط ب ح على كل من اثرى هذا المستوى أيضاً

## ٢٦ — الزاوية الزوجية او الزاوية بين مستويين

ذكرنا في الهندسة الفراغية ان الزاوية بين مستويين أو ميل أى مستوى على آخرى الزاوية بين مستقيمين مرسومين من أى نقطة على خط تقاطعهما وعموديين عليه وكل من المستقيمين في مستو منهما على التوالى .



فمن شكل نمرة ١٣٦ نرى أن المستويين د ح و ا ب متقاطعان في الخط ح د فلو رسم المستقيم ك ه في المستوى د ح عموداً على خط التقاطع ح د من النقطة ه .

( شكل ١٣٦ )

ومن نفس النقطة ه رسم ه ه عموداً على ح د وفي المستوى ا ب .

لكانت الزاوية الزوجية بين المستويين د ح و ا ب هي الزاوية ه بين ك ه و ه ه أو الزاوية ك ه ه وهى ميل كل من المستويين على الآخر ويلاحظ ان كل من ك ه و ه ه عمود على المستقيم ح د من نقطة واحدة عليه فيكون مستويهما ك ه ه عمود على ح د النظرية الثالثة صفحة ٦ .

وينتج من ذلك انه اذا اريد ايجاد ميل اى مستويين متقاطعين على بعضها يقطع المستويان بمستو عمودى على خط تقاطعهما فتكون الزاوية بينهما هي الزاوية بين خطي تقاطعهما مع المستوى العمودى .

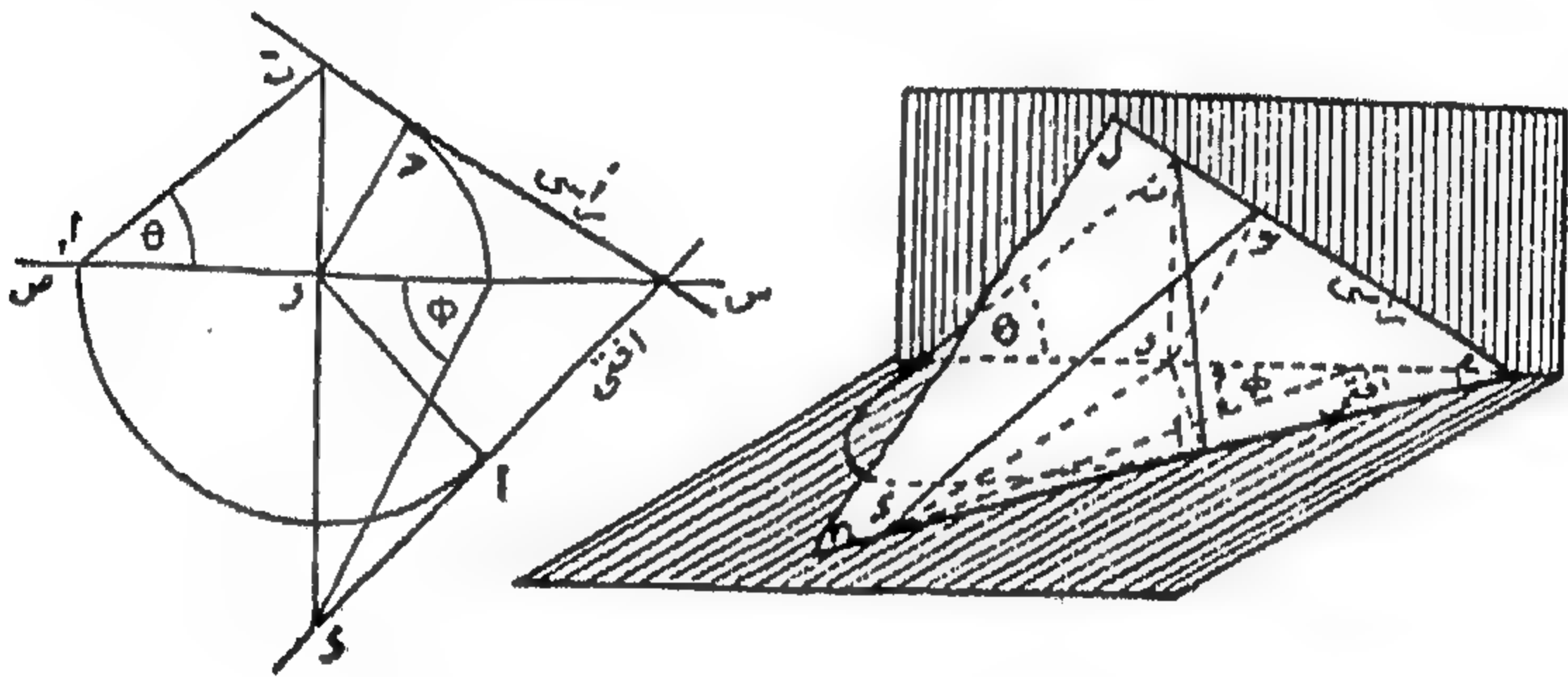
ففي الشكل المستوى ك ه ه عمودى على كل من المستويين د ح و ا ب لانه

عمود غير موجودة على خط تقاطعها  $ح$  عكس النظرية الخامسة صفحة ٩  
 فزاوية ميل أحد المستويين على الآخرة  $هـ$  زاوية بين  $ك$  و  $ق$  و  $هـ$  وهما خطي  
 تقاطع المستويين  $د$  و  $ق$   $أ$   $ب$  مع المستوى العمودي عليهما  $ك$   $هـ$  كما ذكر.

مسألة ۱۹ — تعیین میل ای مستوی فراغی معلوم اشراہ علی کل من

## مستوى المسقط

المفروضه — الاثر الرأسى والافقى المستوى له من شكل (١٣٧)



(شکل ۱۳۸)

(شکل ۱۳۷)

والمطلوب إيجاد ميل هذا المستوى على كل من مستويي المسقط

المعمل — الشكل المنظور ١٣٧ يبين المستوى  $h$  م  $h$  بالنسبة لمستوي المسقط في الفراغ وفيه الخط  $ab$  عمود على الاثر الاقنى  $m$  من النقطة  $a$  والخط  $ao$  في المستوى الاقنى وعمود على هذا الاثر من النقطة  $a$  ايضا  
فمن التعريف يكون ميل المستوى  $h$  م  $h$  على المستوى الاقنى هو الزاوية  $bao$  وليكن مقدارها الحقيقي هو  $\theta$

فبدوران المثلث  $\alpha$  وحول الخط  $\beta$  و الى أن ينطبق على المستوى الرأسى يمكن  
ايجاد المقدار الحقيقى لتلك الزاوية وهذه العملية موضحة بشكل نمرة ١٣٨ الغير  
منظور وهى كالآتى

نأخذ نقطة مثل و على خط الارض ونرسم منها الخط و ا عموداً على الاثر  
الاقصى م ن و نقيم العمود و ب على خط الارض الى أن يلاقى الاثر الرأسى في



في  $\alpha$  فيكون الخط  $\beta$  و هو عين الخط  $\beta$  و في المنظور والخط  $\alpha$  هو عين الخط  $\alpha$  في الشكل المنظور أيضا

فإذا ركزنا في  $\alpha$  و بنصف قطر يساوي  $\alpha$  ورسمنا قوسا  $\alpha\alpha$  ليقطع خط الأرض في  $\alpha$  لكان الخط  $\alpha$  هو نفس الخط  $\alpha$  بعد انطباقه على المستوى الرأسى فنصل  $\beta$   $\alpha$  يكون هو الضلع الثالث المثلث بعد الانطباق ويكون  $\beta$   $\alpha$  و هو الشكل الحقيقي للمثلث  $\beta$   $\alpha$  و في الشكل المنظور .  
وعليه تكون الزاوية  $\alpha$  و او ميل المستوى ل  $\alpha$  على المستوى الافقى هي الزاوية  $\beta$   $\alpha$  و .

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد الزاوية  $\alpha$  و هي زاوية ميل المستوى ل  $\alpha$  على المستوى الرأسى وهذا واضح بالشكل وهي الزاوية  $\alpha$  و  
ونرى أيضا في الشكل المنظور والغير منظور : —

أولا — ان القوس  $\alpha\alpha$  هو جزء من محيط قاعدة مخروط قائم قاعدته في المستوى الافقى .

ثانيا — ان محور هذا المخروط هو الخط  $\beta$  و موجود في المستوى الرأسى

ثالثا — ان مركز قاعدة المخروط هو النقطة و الموجودة على خط الأرض

رابعا — وان الخط  $\alpha\beta$  هو احد رواسم المخروط المذكور .

خامسا — ان ميل هذا الراسم على القاعدة هو عين ميل المستوى ل  $\alpha$  على المستوى الافقى ويساوي الزاوية  $\alpha$  و .

سادسا — ان المستوى ل  $\alpha$  مماسا لهذا المخروط في خط واحد وهو الراسم  $\alpha\beta$  .

ويمكن ملاحظة ذلك كله بالنسبة لزاوية  $\alpha$  و هي ميل المستوى ل  $\alpha$  على المستوى الرأسى فهي ميل راسم مخروط آخر قاعدته في المستوى الرأسى ومركزه و على خط الأرض ومحوره و في المستوى الافقى وان المستوى ل  $\alpha$  مماسا لهذا المخروط في الراسم  $\alpha\beta$  .

ويلاحظ أنه ليس من الضروري أن يقع مركزي قاعدتي المخروطين المتقدم ذكرهما على نقطة واحدة مثل و بل يمكن أن ينتخب مركزان مختلفان لقاعدتيهما .  
الطريقة المتقدمة الذكر يمكن العمل بها في كل مستو معين اثره الا اذا كان  
الاثران متوازنين كما بشكلى نمرة ١٢٧ و ١٣٠

فيكفى بعد ايجاد ميل المستوى على أحد مستويي المسقط واتكن  $\theta$  مثلا ان نقول  
أن مقدار الزاوية  $\phi$  هو  $(90^\circ - \theta)$

أما في الاشكال الثلاثة من نمرة الى نمرة فليس من الضروري استعمال أى  
طريقة لاجاد زاوية  $\theta$  أو  $\phi$  أذ أن في تلك الاحوال زاوية  $\theta$  هي عين ميل الاثر  
الرأسى مع خط الارض  $\phi$  هي عين ميل الاثر الاقصى مع خط الارض .

وفي حالة عدم وجود الاثر رأسى للمستوى كما بشكل نمرة ١٢٥ تكون  $\theta$  هي  
 $180^\circ$  و  $\phi$  هي  $90^\circ$

وفي حالة عدم وجود الاثر اقصى له كما بشكل نمرة ١٢٦ تكون  $\theta$  هي  $90^\circ$   
و  $\phi$  هي  $180^\circ$  .

مسألة ٢٠ - طريقة تعيين أثرى مستو معلوم ميله على كل من مستويي المسقط  
المفروضه — الزاوية  $\theta$  هي زاوية ميل أى مستو على المستوى الاقصى  
وزاوية  $\phi$  هي ميله على المستوى الرأسى .

المطلوب — رسم أثرى هذا المستوى

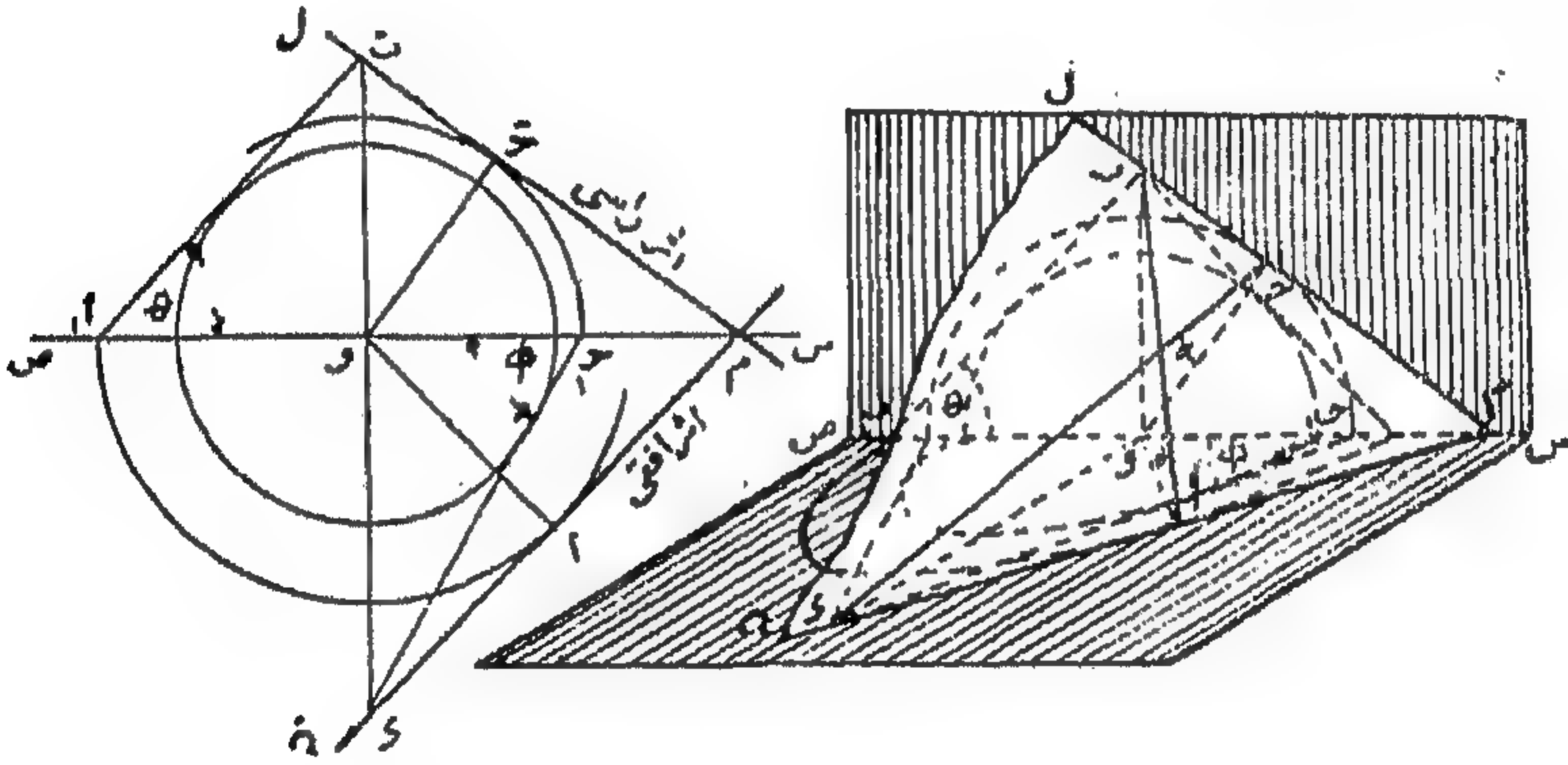
العمل : — هذه العملية هي عكس العملية السابقة في بند ١٦ ولحلها طريقتان .

الطريقة الاولى : — وهى طريقة المخروطين السابق الكلام عليهما في البند  
المذكور .

فالمخروط الاول تكون قاعدته في المستوى الاقصى ومحوره في المستوى الرأسى  
وزاوية ميل رأسه مع قاعدته هي  $\theta$  .

والمخروط الثاني تكون قاعدته في المستوى الرأسى ومحوره في المستوى الافقى وزاوية ميل راسمه على قاعدته هي  $\Phi$  والمستوى المطاوب يكون مماسا لكل من المخروطين في احدى رواسمه على التوالى .

فاسهل طريقة لرسم هذين المخروطين بحيث يمكن أن يمسهما مستو واحد هي إيجاد الكرة المشتركة بينهما أعنى الكرة المماسية للمخروطين من الداخل بعد تقاطعهما بحيث ينطبق مركزها على مركزى قاعدتى المخروطين المذكورين فيكون مركز الثلاثة فى نقطة واحدة على خط الارض .



شكل ( ١٣٩ )

ففى الشكل ١٣٩ انتخبت النقطة و على خط الارض لتكون مركزاً للكرة ورأساً فى و و بنصف قطر مناسب ورسمنا دائرة تمثل المسقط الافقى والرأى لتلك الكرة المراد رسمها

فاذا رسمنا الخط بـ ا ليمس الدائرة المذكورة ويميل بزاوية  $\theta$  مع خط الارض فى نفس الوقت يكون بـ ا هو راسم المخروط الاول المنطبقة قاعدته على المستوى الافقى .

ولو رسمنا الخط و ب عموداً على خط الارض ليقابل بـ ا فى ب يكون و ب هو محور هذا المخروط ورأسه هي نقطة بـ

وبالمثل لو رسم د م مماساً للدائرة نفسها ويميل بزاوية  $\phi$  مع خط الارض ويقابله فى م يكون د م هو راسم المخروط الثانى الذى قاعدته فى المستوى الرأسى

ولو رسم من والمستقيم و عمودا على خط الأرض ليقابل هـ ، في تكون  
هـ هي رأس المخروط الثاني .

ولرسم مسقط قاعدة المخروط الاول نركز في و ونصف قطر يساوى و ا  
ونرسم ا ا يكون هذا القوس هو جزء من المسقط الأفقى لقاعدة المخروط الاول  
الذى يسمه المستوى المطلوب .

وحيث ان تلك القاعدة موجودة على المستوى الأفقى فلا بد أن يكون الأثر  
الأفقى للمستوى المطلوب مماسا لها .

وبالمثل لو ركزنا في و ونصف قطر يساوى و هـ ورسمنا قوسا هـ هـ يكون  
هذا القوس هو جزء من قاعدة المخروط الثانى الذى يسمه الأثر الرأسى للمستوى  
المطلوب أيضا .

وحيث ان كل من رأسى المخروطين الأول والثانى س و هـ هما فى المستويين الرأسى  
والأفقى على التوالى لأن محور الأول فى المستوى الرأسى ومحور الثانى فى المستوى  
الأفقى ولا بد من وقوعهما أيضا على المستوى المطلوب لأنهما يقعان على رأسى  
المخروطين .

فلو رسمنا من س مماسا للقوس هـ هـ وليكن س م يكون هو الأثر الرأسى  
المستوى ولو رسمنا من س المماس س م للقوس ا ا يكون هو الأثر الأفقى للمستوى .  
وهذان الاثران لا بد من تقابلهما على خط الارض كما سبق فى نقطة واحدة مثل م  
والشكل المنظور نمرة (١٣٩) يوضح مواضع المخروطين والمستوى المطلوب فى  
الفراغ بالنسبة لمستويي المسقط وفيه

و مركز الكرة والمخروطين

و س ا رسم المخروط الاول

و ا ا جزء من قاعدة هذا المخروط

و هـ رسم المخروط الثانى

و هـ هـ جزء من قاعدة المخروط الثانى



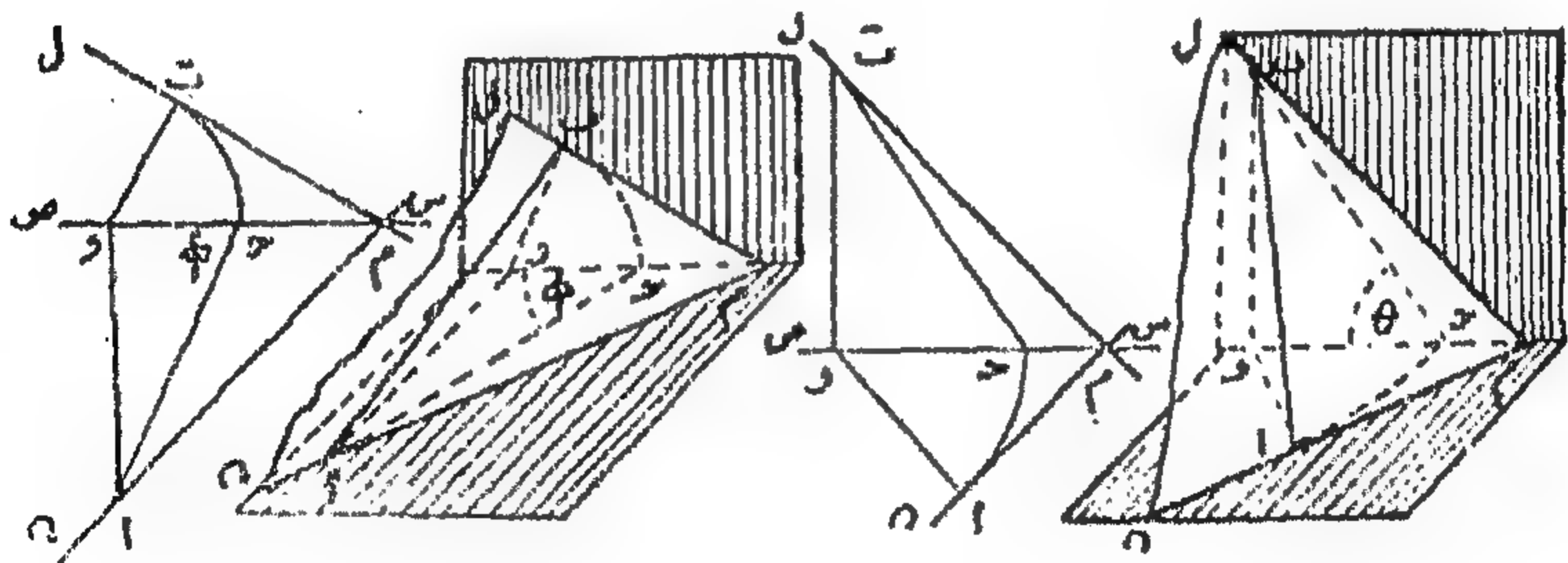


مرة ١٣ صفحة ( ٦٧ ) وليكن  $ح د و$  ح  $د$  هما مسقطا ذلك الخط فيكون هذا الخط هو العمودى على المستوى المطلوب ويكون الاثر الرأسى والافقى لهذا المستوى عمودين على المسقط الرأسى والافقى لهذا الخط وفى الشكل ل م و م  $و$  متعامدان على  $ح د و$  على التوالى ومتقابلين من نقطة م على خط الارض فهما الاثران المطلوبان .

ملاحظة — اما ان يتقابل الاثران في هذه الحالة على خط الارض وعلى بعد مناسب منه كما بالشكل أو لا يتقابلان على بعد مناسب منه أو يكونا موازيين لخط الارض

مسألة ٢١ - المعلوم أنه أقرى مستوى وميله على أحد مستويي المسقط  
والمطلوب إيجاد أثره الثاني

الحالة الاولى : المقروضة : - ان  $\theta$  هي ميل أى مستوى على المستوى  
الافقى وان  $\alpha$  أثره الافقى شكلى (١٤٢) و (١٤٣) والمطلوب إيجاد الاثر الرأسى  
لهذا المستوى



شکل (۱۴۲)      شکل (۱۴۳)      شکل (۱۴۴)      شکل (۱۴۵)

العمل — ننتخب أى نقطة مثل و على خط الأرض مركزا لقاعدة المخروط  
الرأسى القائم السابق الكلام عليه فى الطريقة الاولى من العملية السابقة  
ثم نرسم و اعمودا على م ا فيكون نقطة ا هى نقطة على أحد رواسم المخروط

المذكور ثم نركز في  $و$  وبنصف قطر يساوي  $وا$  ونرسم قوساً يقطع خط الأرض في  $ح$

ثم نرسم منها الخط  $حـ$  يميل بالزاوية  $\theta$  على خط الأرض وهي ميل المستوى المطلوب على المستوى الأفقي ثم من  $و$  نقيم العمود  $وـ$  على خط الأرض حتى يقابل  $حـ$  في  $بـ$  فيكون  $حـ$  هو الرأس الذي يميل بالزاوية  $\theta$  على المستوى الأفقي وتكون نقطة  $بـ$  هي رأس المخروط وموجوده على الاثر الرأسى للمستوى ثم نصل  $مـ بـ$  يكون هو الاثر الرأسى المطلوب

الحالة الثانية — المفروضه ان الزاوية  $\varphi$  هي ميل أى مستوى على المستوى الرأسى وان  $مـ ن$  هو الاثر الرأسى لهذا المستوى شكلى ( ١٤٤ ) و ( ١٤٥ ) والمطلوب إيجاد الاثر الأفقى لهذا المستوى

العمل — ننتخب نقطة مثل  $و$  على خط الأرض مركزاً لقاعدة المخروط الثانى ثم من  $و$  ننزل العمود  $وـ$  على الاثر الرأسى  $مـ ن$  ثم نركز في  $و$  وبنصف قطر يساوي  $وـ$  ونرسم قوساً  $بـ$  يتقابل مع خط الأرض في نقطة  $حـ$

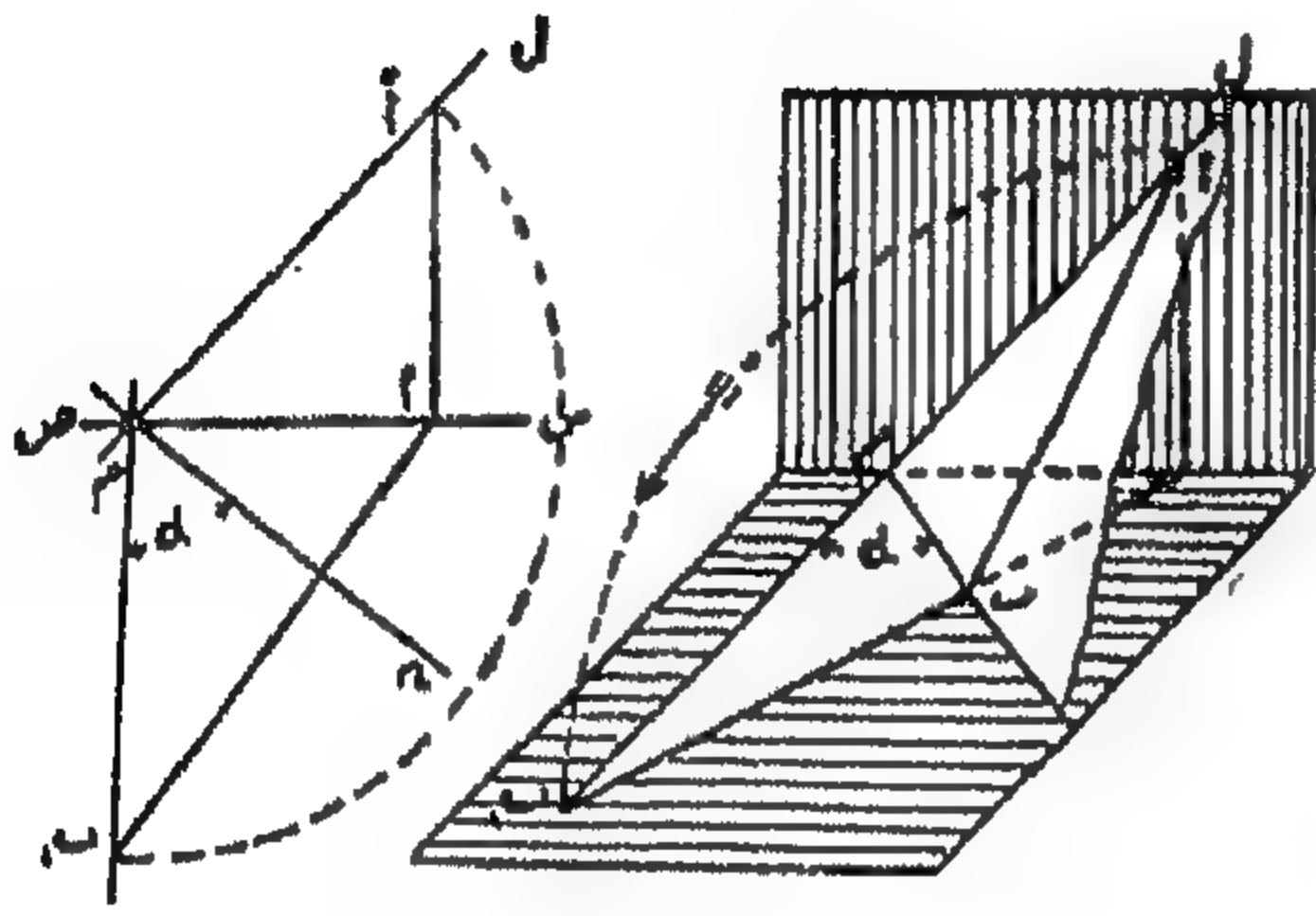
ثم من  $حـ$  نرسم خطاً  $حـ ا$  يميل على خط الأرض بالزاوية  $\varphi$  وهي ميل المستوى المطلوب على المستوى الرأسى ومن  $و$  نقيم العمود  $وا$  على خط الأرض يقابل  $حـ ا$  في  $ا$  يكون  $حـ ا$  هو الرأس الذي يميل بالزاوية  $\varphi$  وتكون  $ا$  هي رأس المخروط الموجودة على الاثر الأفقى للمستوى

ويكون  $نـ م$  هو الاثر الأفقى المطلوب

البرهان — يمكن التحقق من صحة العملية السابقة بإيجاد ميل المستوى  $نـ م$  على كل من مستويي المسقط بعد إيجاد أثرية فكل المستقيمتان الى يحتاج الى رسمها غير موجودة في إيجاد ميل المستوى لا بد من انطباقها على نظيراتها الموجودة في هذه العملية وهذا برهان كاف على صحتها

مسألة ٢٢ - المطلوب تعيين الزاوية الحقيقية بين أثرى أى مستوى فى الفراغ معلوم أثره على مستوي المسقط  
المفروضه - المستوى ل م ن وأثره الرأسى ل م والافقى م ن شكل (١٤٦)  
و (١٤٧)

والمطلوب : تعيين الزاوية الحقيقية بين الاثرين .



شكل (١٤٧)

شكل (١٤٦)

يراد بالزاوية الحقيقية بين  
أثرى أى مستوى الزاوية بينهما  
فى الفراغ حال وجود المستوى  
المفروض ومستوي المسقط بحالتهما  
الطبيعية كما فى الشكل المنظور  
(١٤٦) وليس المراد منها الزاوية  
ل م ن التى بينهما بعد انطباق مستويي

المسقط شكل (١٤٧) فالزاوية المراد إيجادها إذا هى الزاوية ا م ب وهى زاوية  
من المثلث ا م ب فى الفراغ وهذه يمكن إيجادها بعد إيجاد الشكل الحقيقى للمثلث  
ا م ب المذكور وفيه الخط ا ب عمود على الاثر الاقضى م ب

العمل - نرسم من أى نقطة ا على خط الارض الخط ا ب عموداً على الاثر  
الافقى المستوى ل م ن ثم العمود ا ا على خط الأرض ليقابل الاثر الرأسى  
فى ا فالمستقيم ا ب شكل (١٤٧) هو المسقط الافقى المستقيم ا ب فى الشكل المنظور  
ويكون كل من ا ب هما أثرا الخط ا ب الرأسى والافقى على التوالى وتكون رؤوس  
المثلث ا م ب هى النقطة ا الحقيقية وهى ا فى الشكل (١٤٧) والنقطة ب الحقيقية  
وهى النقطة ب فى الشكل (١٤٧) والنقطة م الحقيقية وهى م فى الشكل (١٤٧)  
فاذا تصورنا دوران المستوى ل م ن حول الاثر الافقى الى أن ينطبق على  
المستوى الافقى .

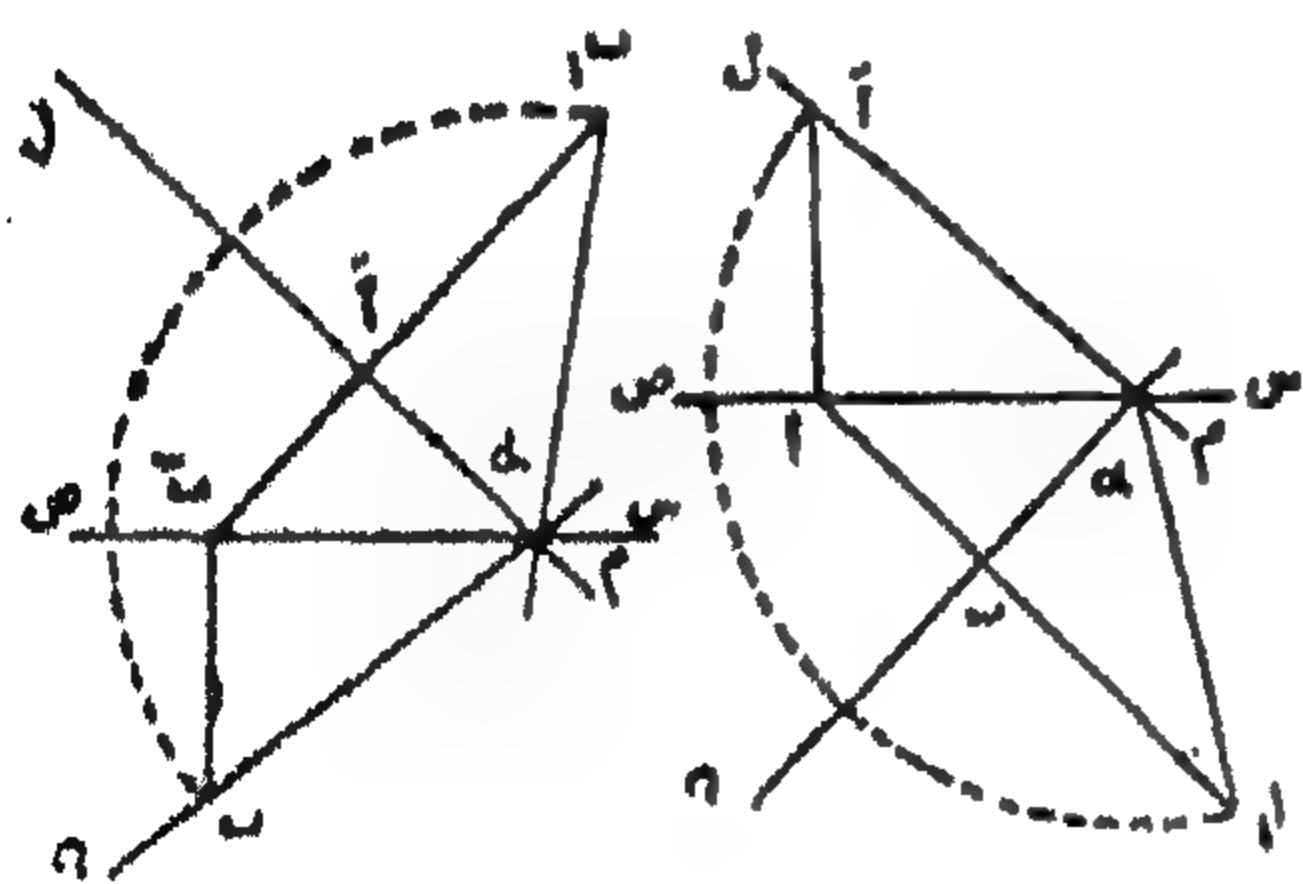
يكون الخط  $ab$  دائماً عمودياً على الاثر الاقصى في كل وضع الى أن ينطبق  
المستوى  $l$  مع  $m$  على المستوى الاقصى وينطبق الخط  $ab$  على امتداد مسقطه  
الاقصى  $a$  وتقع النقطة  $a$  بعد الانطباق على امتداد  $a$  عند  $m$

وحيث أن م آ هو بعد حقيقي لانه في المستوى الرأسى فيكون ثابتا بعد الانطباق أيضاً

فاذا ركزنا في م و بنصف قطر يساوي المستقيم م آ ورسمنا قوساً يقطع امتداد  
 ا ب في ب يكون المثلث ا م ب قبل الانطباق هو المثلث م ب ب بعد الدوران وتكون  
 الزاوية ا م ب هي الزاوية الحقيقية م ب ب بين الاثرين وهو المطلوب

مسألة ٢٣ — المعلوم أن أثر أثرى مستو والزاوية الحقيقية بين الأرب  
والمطلوب إيجاد الأثر الثاني له

الحالة الأولى - المفروضة: أن  $m$  هو الاثر الافقى المستوى  $m$  وأن  
الزاوية الحقيقية بين أثره  $a$  والمطلوب إيجاد أثره الرأسى شكل ١٤٨



(۱۴۸۵)

(شکل ۱۴۹)

ثم نركز في م و بنصف قطر يساوي م ا، ونرسم قوساً ليلاقي العمود المقام على خط الأرض من ا في النقطة آ فيكون رؤوس المثلث المذكورة في العملية السابقة هي ا ب م و ب ويكون نقطه آ هي الرأس الموجودة على الاثر الرأسي فاذا وصلنا المستقيم آ م يكون هو الاثر الرأسي للمستوى ل م ن وهو المطلوب .

أم يكون هو الاثر الرأسي للمستوى ل م ن وهو المطلوب

الحالة الثانية — المفروضة : أن  $m$  هو الاثر الرأسى المستوى  $n$  وأن الزاوية الحقيقية بين أثريه هي  $\alpha$  والمطلوب إيجاد أثره الافقى شكل ١٤٩

العمل — نرسم  $m$   $\perp$   $n$  يميل على  $n$  بالزاوية  $\alpha$   $m$   $\perp$   $n$  التى تساوى الزاوية  $\alpha$  ثم من أى نقطة منه مثل  $n$  نرسم الخط  $n$   $\perp$   $n$  عمودا على  $n$  ونعده الى يقابل خط الارض فى  $n$

فيكون رؤوس المثلث السابقة الذكر هي النقط  $n$   $m$   $n$  وتكون نقطة  $n$  هي الرأس الموجودة على الاثر الافقى فنصل  $m$   $n$  يكون هو الاثر الافقى للمستوى  $n$   $m$  وهو المطلوب وهذه العملية عكس العملية السابقة تماماً

## ٢٧ — تقاطع المستويات فى الفراغ

أولاً — ذكرنا من نتائج النظرية الثانية صحيحة (٥) فى الهندسة الفراغية أنه : — يتقاطع الثلاث مستويات فى نقطة واحدة لأن كل اثنين منها يتقاطعان فى خط مستقيم وأن الثلاث خطوط التى تنشأ من تقاطع كل مع الآخر على التوالى لا يمكن تقابلها فى أكثر من نقطة واحدة الا اذا انطبقت على بعضها وهذا يثبت أن نقطة تلاقى أى مستوى مع مستويى المسقط هي نقطة واحدة وهي نقطة تلاقى أثريه اذا تلاقيا وأن هذه النقطة موجودة على خط الارض

ثانياً — أن المستويين : —

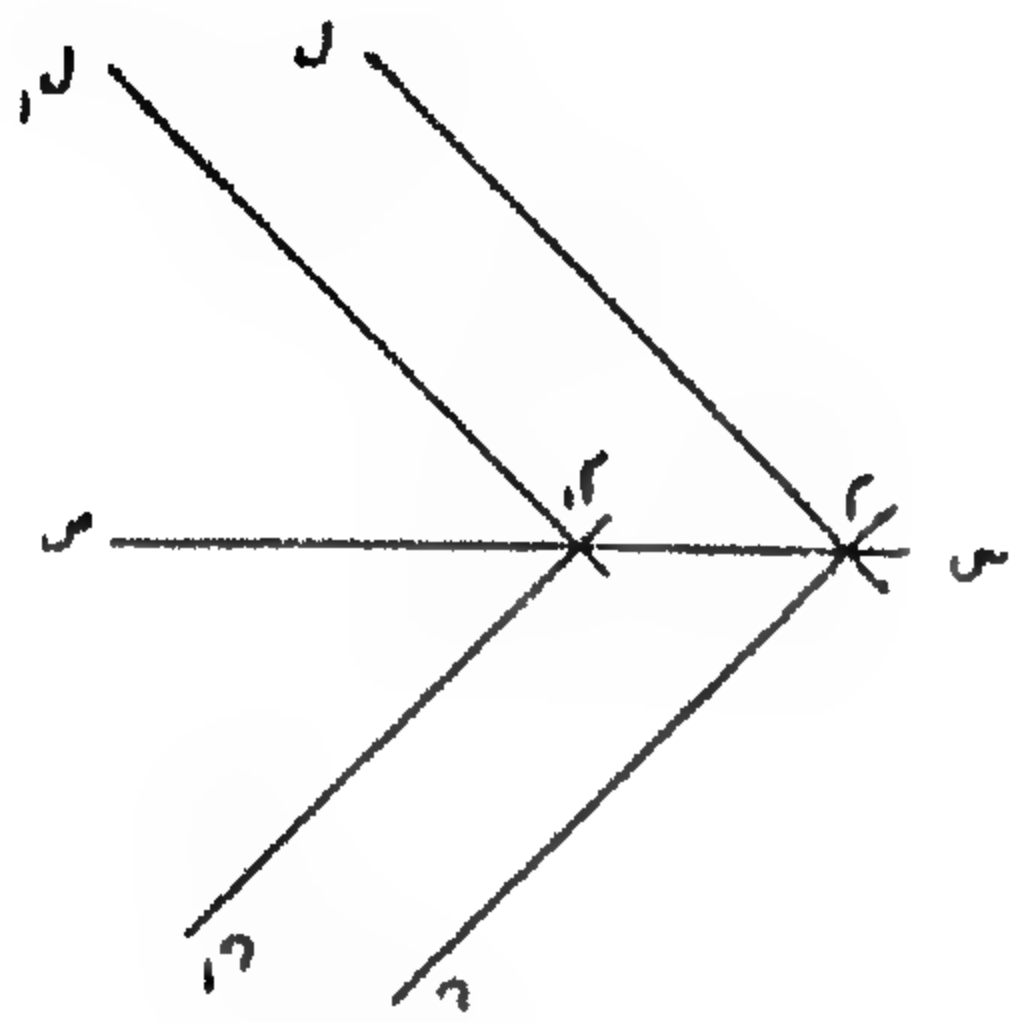
- (١) أما أن لا يشتركا فى نقطة واحدة ويقال انهما متوازيين وهذا ان يكون اثرا كل منهما موازيين لاثرى الآخر كل الى نظيره كما فى الشكل (١٥٠)
- (٢) وأما أن يشتركا فى ثلاث نقط أو أكثر ليست على استقامة واحدة ويقال انهما منطبقان فينطبق اثرا كل منهما على أثرى الآخر
- (٣) وأما أن يشتركا فى نقطتين أو بمعنى آخر فى خط مستقيم ويقال انهما متقاطعان

ومن النتيجة (٣) الاخيرة نرى ان المستويين انما يتقاطعان فى خط مستقيم



فاذا علمت نقطتان من هذا الخط او نقطة واحدة منه واتجاهه علم ذلك الخط والاحوال التي يتقاطع فيها مستويان في الفراغ هي : —

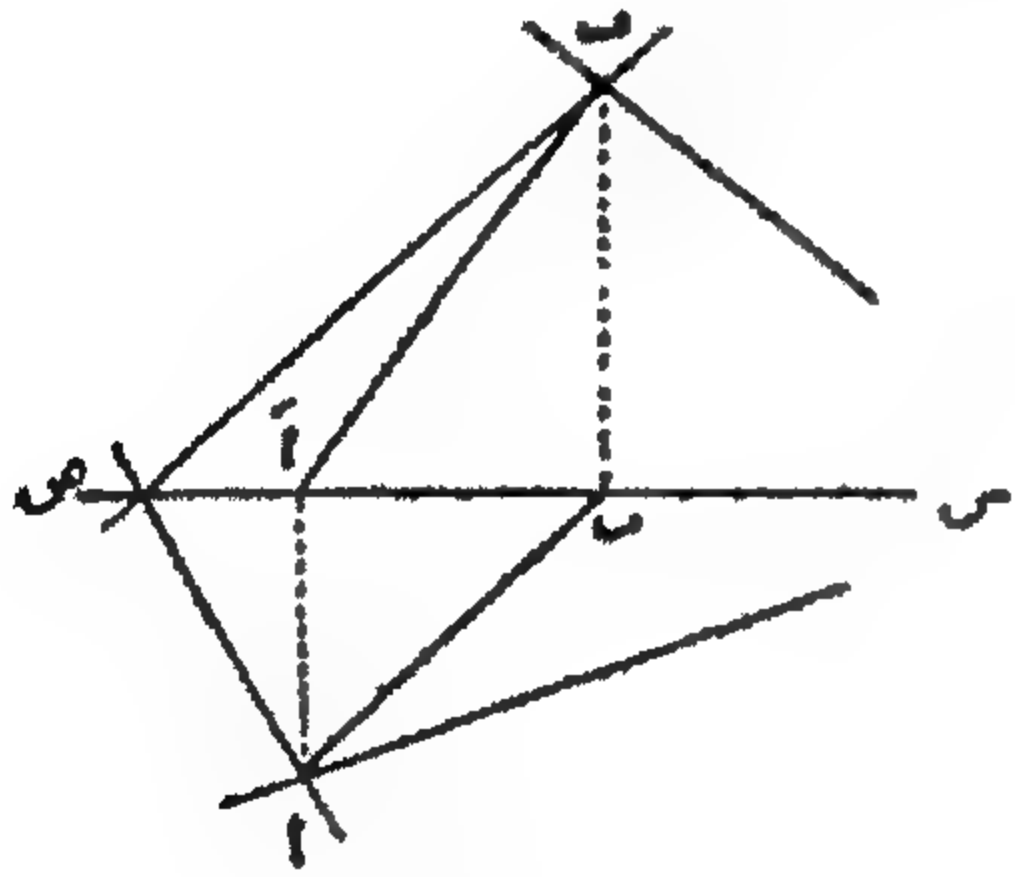
أولاً — إما أن يتقاطع الاثران الرأسيان  
لها في نقطة واحدة والاثران الافقيان لها في  
نقطة اخرى وذلك على بعد مناسب من خط  
الارض شكلي (١٥١) و (١٥٢) فيسهل إيجاد  
خط تقاطعها



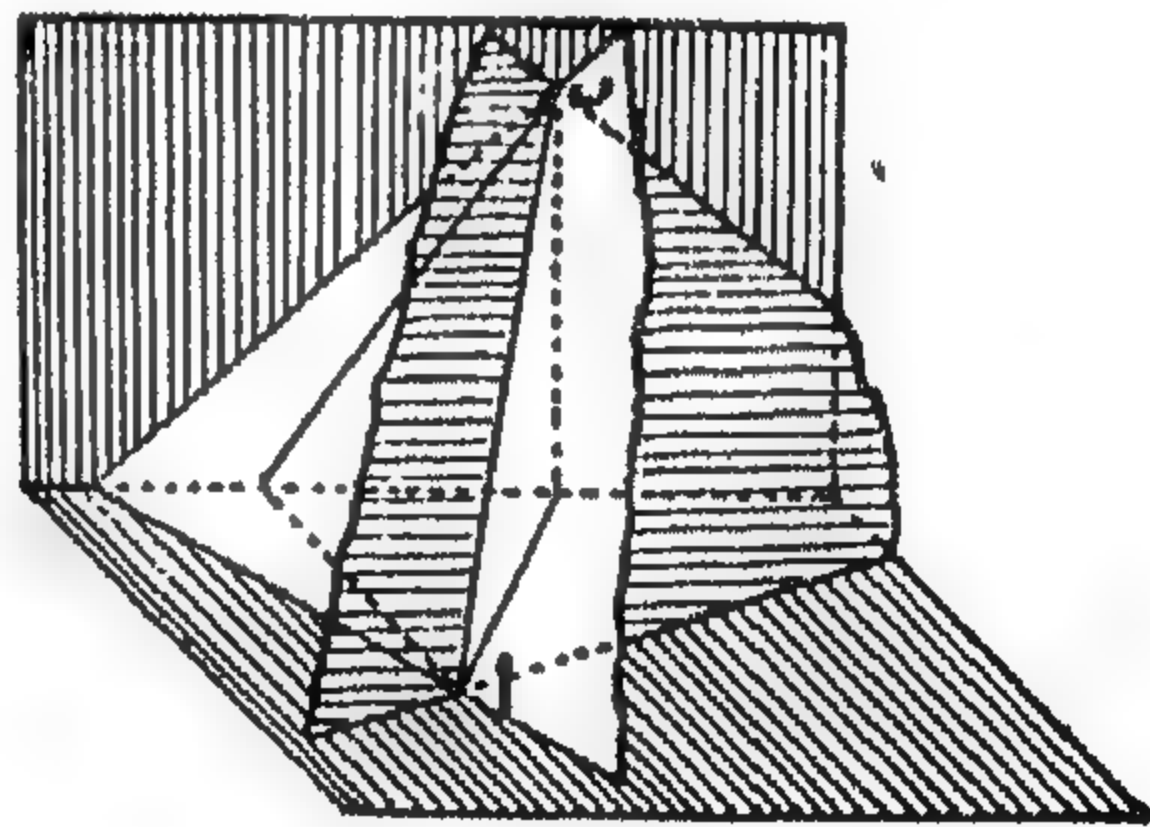
(شكل ١٥٠)

فنقطة تقاطع الاثرين الرأسيين ب لا بد  
وأن تكون هي الاثر الرأسى لخط التقاطع ومسقطها  
الرأسى ب ومسقطها الأفقى ب على خط الأرض

ونقطة تقاطع الاثرين الأفقيين ا لا بد وان تكون هي الاثر الأفقى لخط  
التقاطع ومسقطها الأفقى ا والرأسى آ على خط الأرض ويكون خط تقاطع المستويين  
في هذه الحالة هو الخط ا ب ومسقطه الرأسى آ ب والأفقى ا ب وهو المطلوب



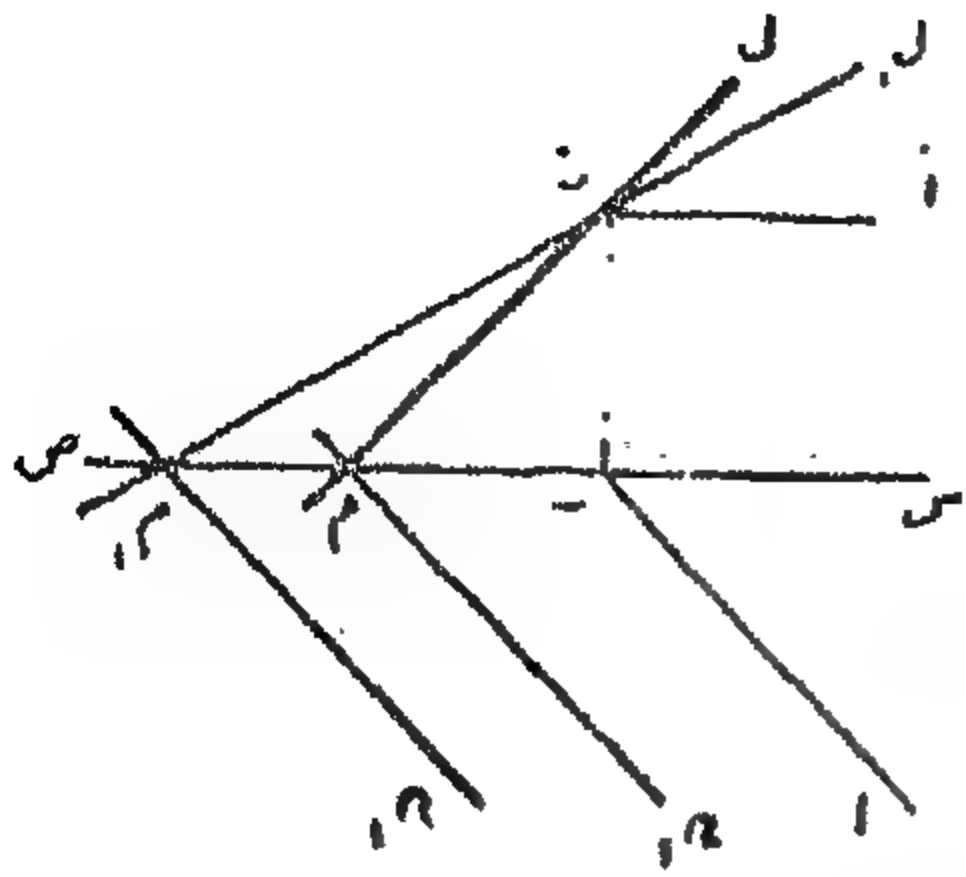
(شكل ١٥٢)



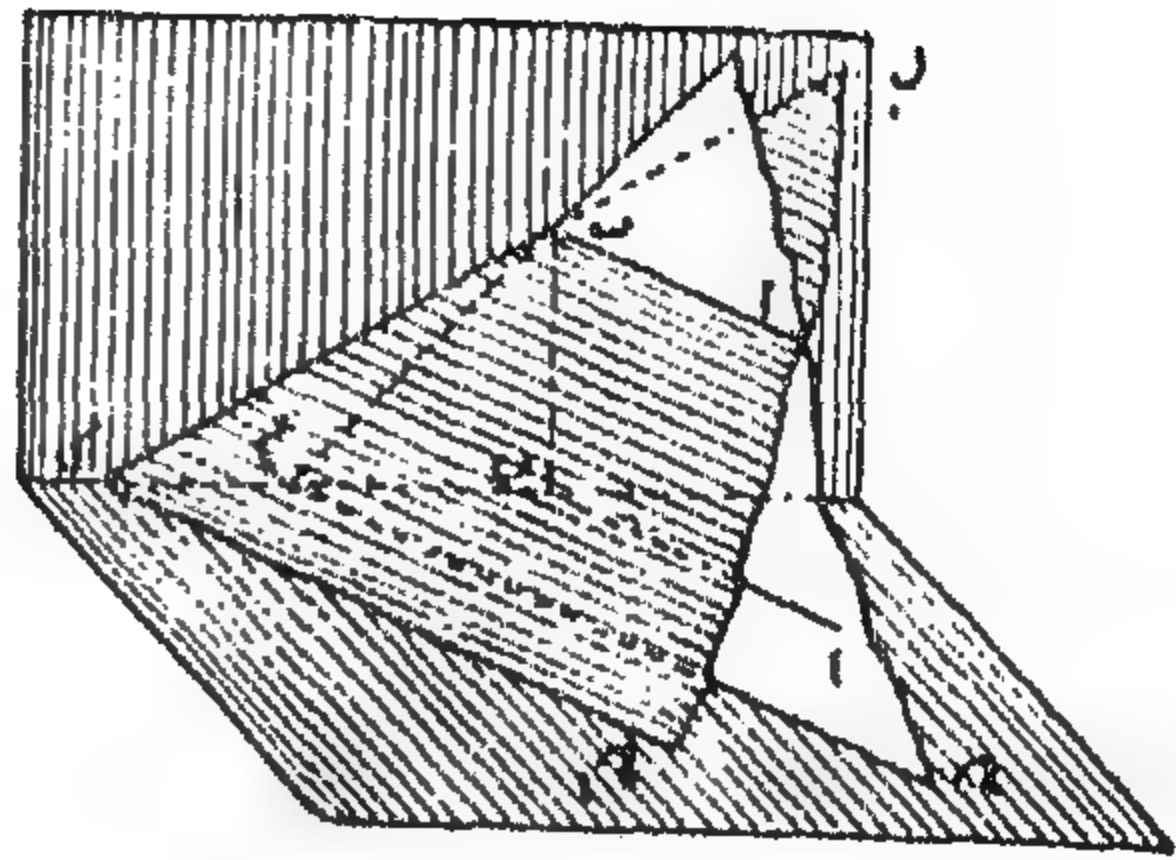
(شكل ١٥١)

ثانياً — واما ان يتقاطع الاثران الرأسيان لها فقط في نقطة واحدة ويتوازي الاثران  
الافقيان فينتقاطع المستويان في هذه الحالة في خط افقى شكلي (١٥٣) و (١٥٤)  
فنقط تلاقي الاثرين الرأسيين ب هي الاثر الرأسى لخط التقاطع ومسقطها الرأسى هو  
ب والأفقى ب على خط الأرض

وحيث ان الاثرين الافقيين متوازيان فلا يوجد أثر افقى لخط التقاطع واذا يكون



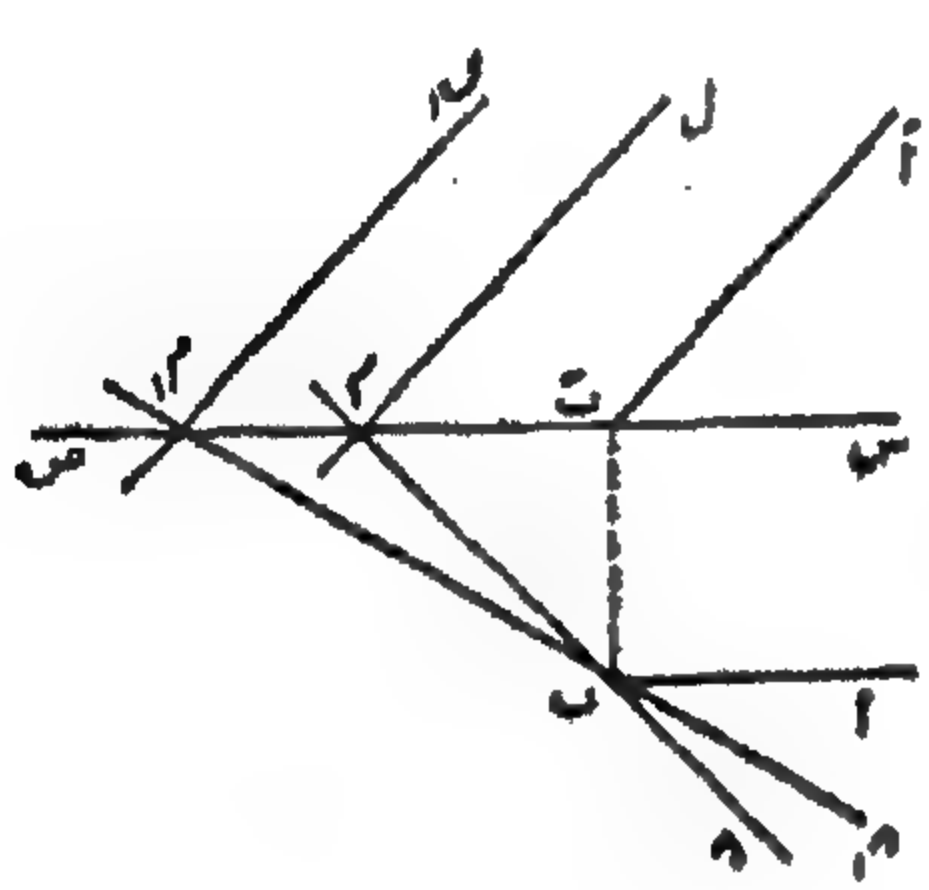
(شكل ١٥٤)



(شكل ١٥٣)

مستطه الافقى موازيا لاحد الاثرين الافقيين ومستطه الرأسى موازيا لخط الارض وهو الخط ب ا ومستطه الافقى ب ا والرأسى ب ا وهو المطلوب

ثالثاً — وأما ان يتقاطع الاثران الافقيان لهما ويتوازي الاثران الرأسيان فيتقاطع المستويان فى هذه الحالة فى خط مواز لمستوى الرأسى شكل (١٥٥) فنقطة تلاقى الاثرين الافقيين ب هى الاثر الافقى لخط التقاطع ومستطها الافقى هو ب

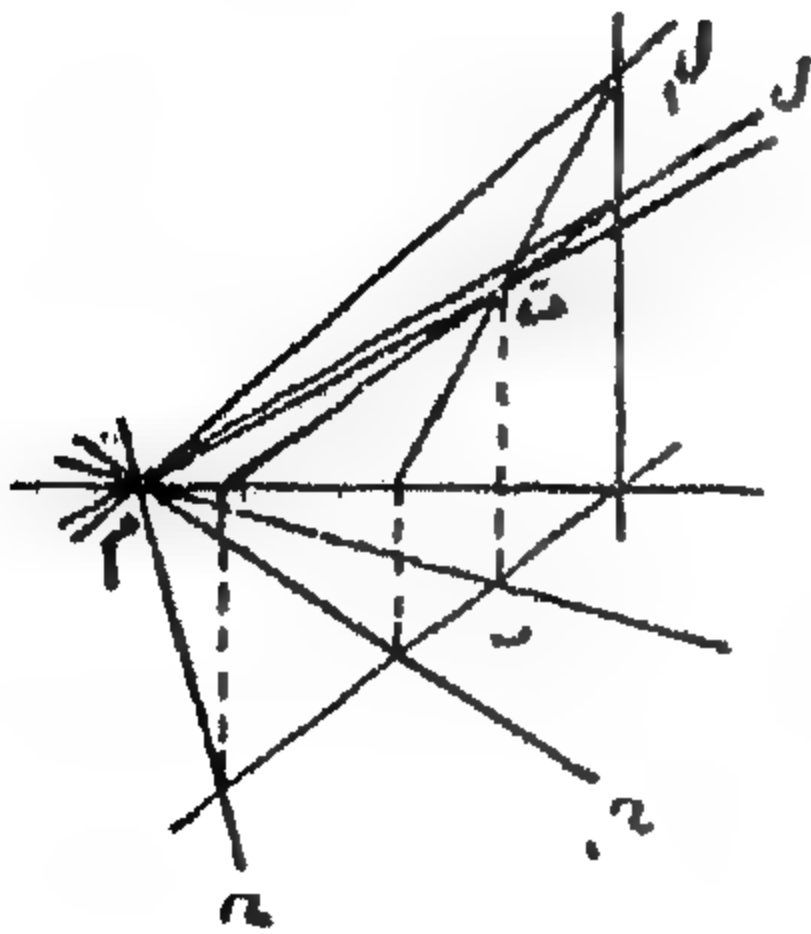


شكل (١٥٥)

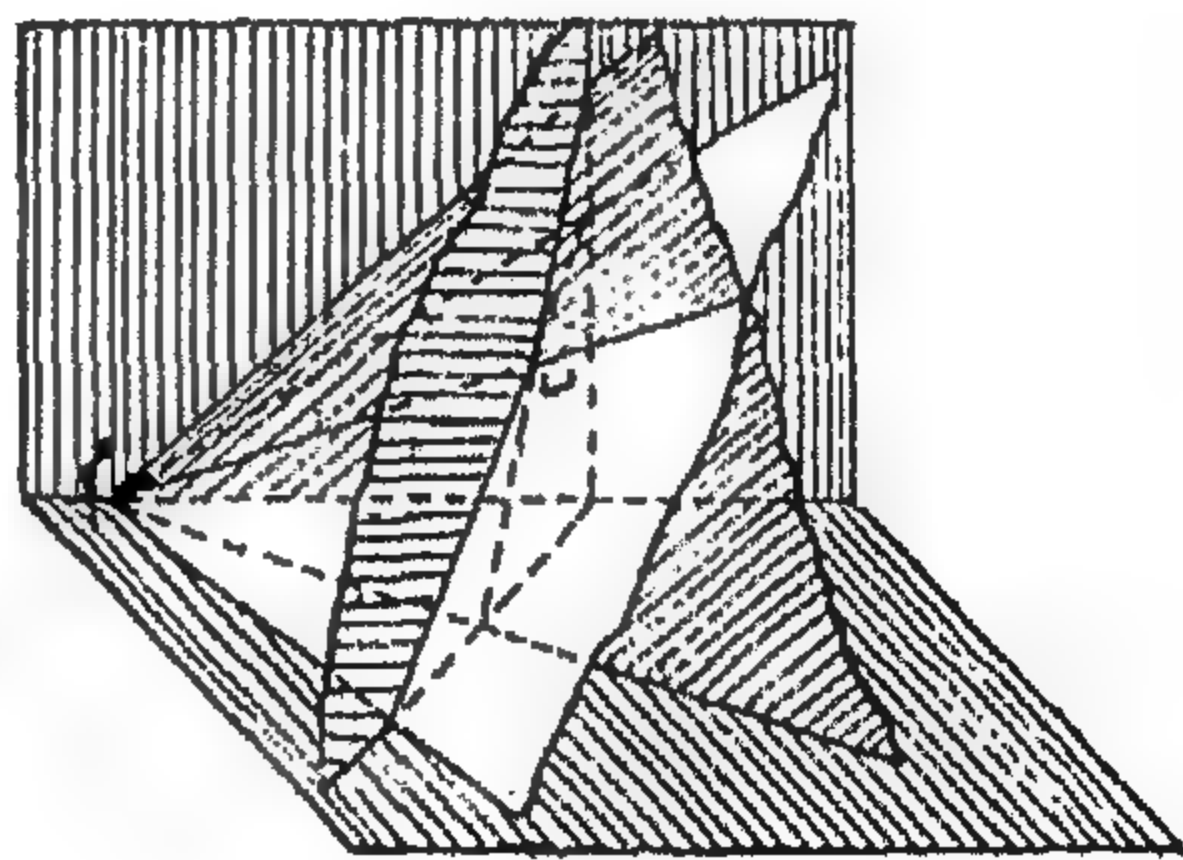
والرأسى على خط الارض ب ويكون المستط الافقى للخط هو ا ب والرأسى له ا ب

رابعاً — وأما ان يتقاطع الاثران الرأسيان والافقيان معاً فى نقطة واحدة على خط الارض وفى هذه الحالة يتقاطع المستويان فى خط مار بخط

الارض كما بشكلى ١٥٦ و ١٥٧



(شكل ١٥٧)



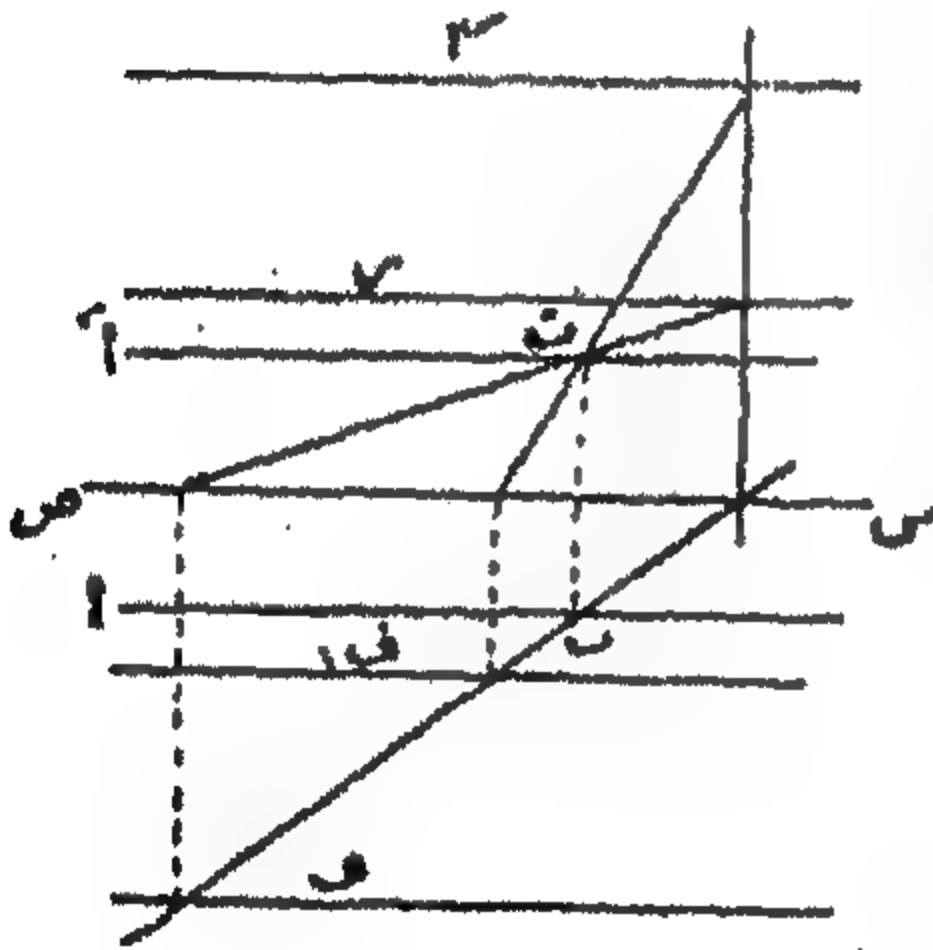
(شكل ١٥٦)

فنقطة تلاقى الاثرات الاربعه م هى الاثر الرأسى والافقى لخط التقاطع فتكون م

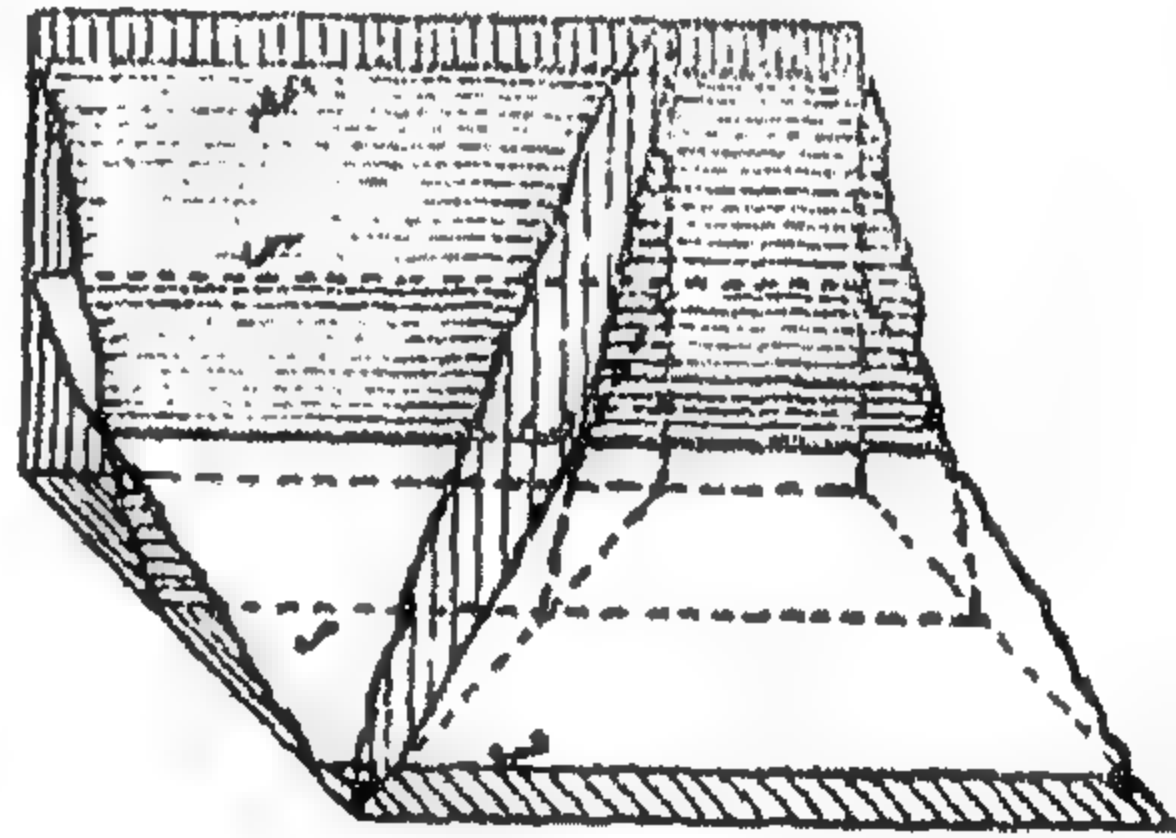
المسقط الرأسى والافقى لاحدى نهايتى خط التقاطع فلايجاد نقطة أخرى عليه يقطع  
المستويان بمستوى ثالث عمودى على المستوى الافقى مثلاً ومائل على المستوى  
الرأسى كما بالشكلين ١٥٦ و ١٥٧

وهذا المستوى الاخير يتقاطع مع كل من المستويين المفروضين فى خط مستقيم  
وخطا التقاطع يتقاطعان فى نقطة واحدة موجودة على كل من المستويين الاصلين  
فهي اذاً نقطة على خط تقاطعهما ولتكن س ويكون المسقط الرأسى لخط التقاطع  
هو س م ومسقطه الافقى س م وهو المطلوب

خامساً — واما ان تتوازي الاثرات الاربعة ويوازي كل منهما خط الارض  
فيتقاطع المستويان فى خط مواز لخط الارض ويمكنى لايجاد خط التقاطع ايجاد  
نقطة واحدة عليه لأن اتجاهه مواز لخط الارض كما بشكلى ( ١٥٨ و ١٥٩ )



( شكل ١٥٩ )



( شكل ١٥٨ )

ولايجاد النقطة المطلوبة يقطع المستويان بمستوى عمودى كما سبق فى الحالة الرابعة  
نحطاً تقاطع المستوى الثالث لكل من المستويين يتقاطعان فى نقطة على خط تقاطعهما  
ولتكن النقطة س هي تلك النقطة فيكون س ا و س ا هو خط التقاطع وموازي لخط  
الارض وهو المطلوب

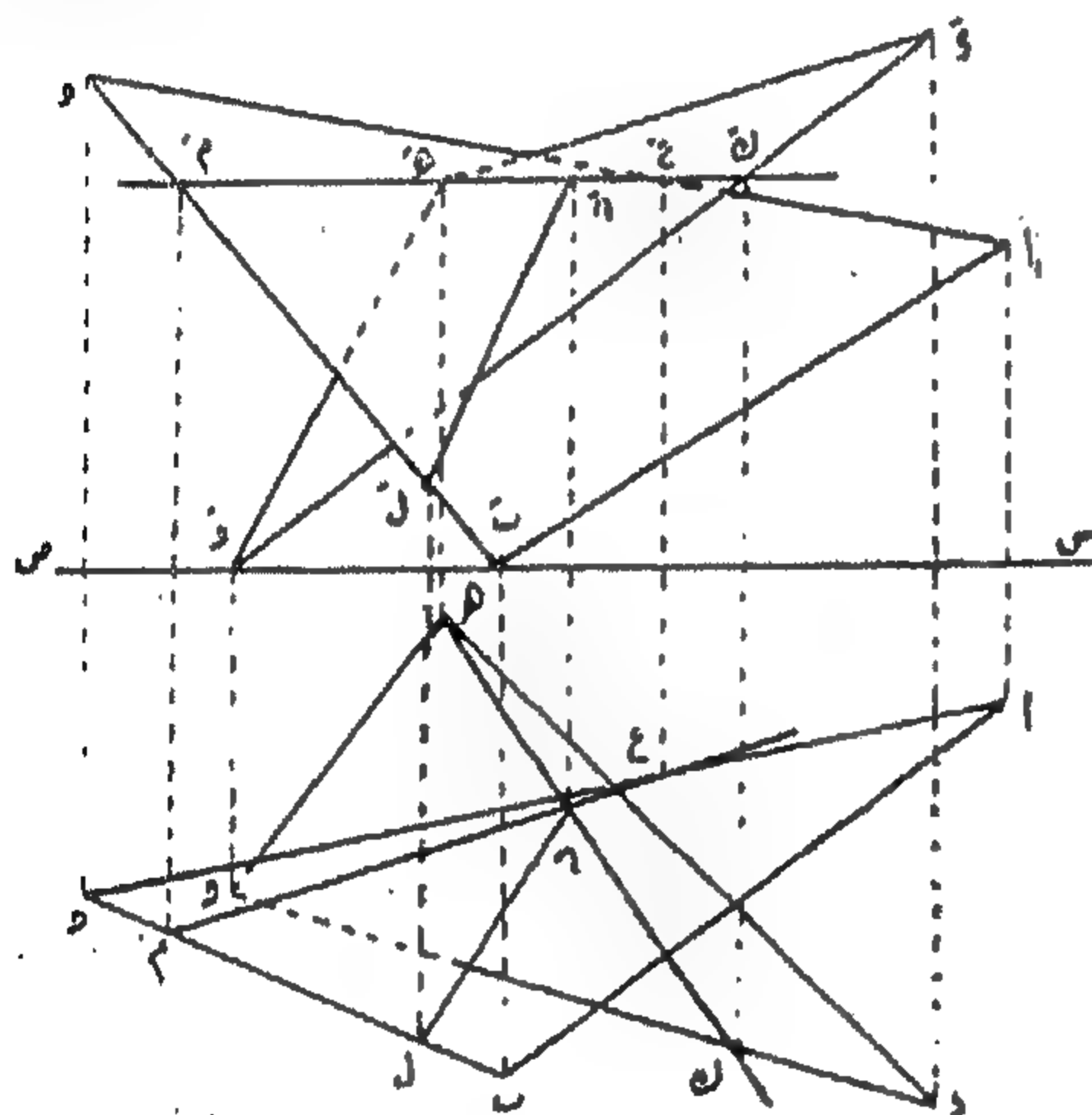
وقد علمنا مما سبق انه يتعين المستوى بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة  
فاذا علم مسقط أى مثلث علم مستوى ذلك المثلث واذا تقاطع مثلث باخر فى الفراغ  
مبثلاً يمكن ايجاد خط تقاطع المثلثين بايجاد خط تقاطع مستويى تلك المثلثين وكذا

يمكن إيجاد خط تقاطع أى شكل مستوي في الفراغ باخر اذا علم مسقطى كل من الشكلاين والطريقة الآتية توضح كيفية إيجاد خط تقاطع مثلثين مستويين ببعضهما معلوم مسقطا كل منهما .

مسألة ٢٤ — طريقة إيجاد خط تقاطع مثلثين مستويين ببعضهما معلوميه

مسقطى كل منهما

المفروضه — ان  $ABC$  و  $DEF$  المسقطين الرأسى والافقى للمثلث  $ABC$  على التوالي وان  $DEH$  و  $FGH$  هما المسقطان الرأسى والافقى للمثلث  $DEH$  و على التوالي



شكل ( ١٦٠ )

شكل ( ١٦٠ ) والمطلوب إيجاد خط تقاطع المثلثين « او خط تقاطع مستوييهما »

العمل — تقاطع كل من المثلثين  $ABC$  و  $DEH$  بمستوي ثالث عمودى على المستوى الرأسى او مواز للمستوى الافقى وليكن الاثر الرأسى لهذا المستوى هو  $LM$  فالمساقط الرأسية لجميع الاشكال

الواقعة في هذا المستوى يكون مسقطها الرأسى واقع على الاثر الرأسى له وان هذا المستوى يقطع كل من مستويي المثلثين في خطين فالأثر  $LM$  يقطع الضلعين  $AC$  و  $BC$  من المثلث  $ABC$  في النقطتين  $M$  و  $N$  على التوالي ومسقطيهما الرأسين هما  $LM$  و  $LN$  ومسقطيهما الافقيين هما  $AC$  و  $BC$  فيكون خط تقاطع المستوى الثالث مع مستوى المثلث  $ABC$  هو الخط  $LMN$  وهذا الاثر أيضا يقطع الضلعين  $DE$  و  $FE$  في النقطتين  $H$  و  $G$  على التوالي ومسقطيهما هما  $LM$  و  $LN$  وخط تقاطع هذا المستوى مع مستوى المثلث  $DEH$  هو الخط  $LMN$  و  $LMN$  هو الخط  $LMN$



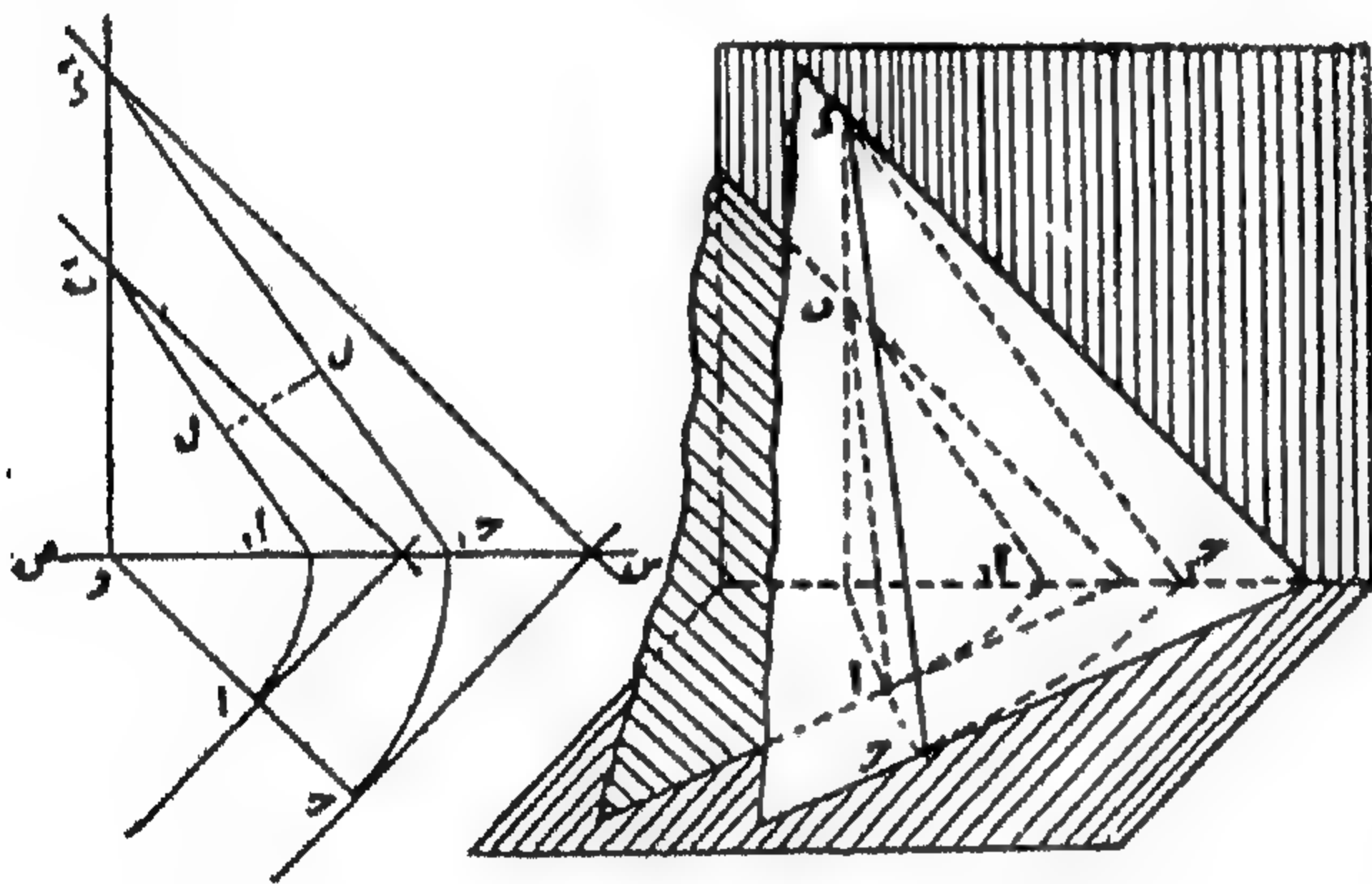
وهذان الخطان يتقاطعان في نقطة واحدة مثل  $\Delta$  ومسقطاها هما  $\Delta$  و  $\Delta$  فهذه  
النقط موجودة في كل من مستويي المثلثين فتكون نقطة من نقط خط تقاطع مستويي المثلثين  
وبنفس الطريقة نجد نقطة أخرى على خط التقاطع مثل  $\Delta$  ومسقطاها هما  $\Delta$  و  $\Delta$   
كما بالشكل

فالخط  $\Delta$  و  $\Delta$  و  $\Delta$  هو خط تقاطع المثلثين او خط تقاطع مستوييهما وهو المطلوب

### مسألة ٢٥ — إيجاد المسافة الحقيقية بين مستويين متوازيين

كل المستويات المتوازية تكون اثارها على كل من مستويي المسقط متوازية  
النظير لنظيره

المفروض — في شكل (١٦١) و (١٦٢) المنظور والغير منظور الاثران الرأسيان



لمستويين متوازيين  
وهذان الاثران  
متوازيان وكذا  
اثرهما الأفقيين  
متوازيان

والمطلوب تعيين  
المسافة بين المستويين

(شكل ١٦٢)

(شكل ١٦١)

الحل — يقطع كل من المستويين بمستوى ثالث عمودي على المستوى الأفقي  
مثل المستوى  $\Delta$  وح الذي اثره الأفقي وح في شكل (١٦٢) الغير منظور وعمودي  
على الاثرين الأفقيين للمستويين المفروضين فهذا المستوى يقطع المستويين المذكورين  
في خطين متوازيين المسافة بينهما هي المسافة الحقيقية بين المستويين المفروضين  
وفي شكل (١٦٢) نجد ان المسقط الأفقي لكل من خطي التقاطع واقع على  
وح وهو الاثر الأفقي للمستوى العمودي وأن الاثر الرأسى لاحدهما هو  $\Delta$  والآخر هو  $\Delta$   
فاذا أدركنا هذين الخطين الى أن ينطبقا على المستوى الرأسى بأن نركز في و



أيضاً وكان د ح ا يوازي ب ا لانهما متوازيان وكانت المسافة العمودية بينهما هي المسافة الحقيقية بين المستويين وهي ل ل وهو المطلوب

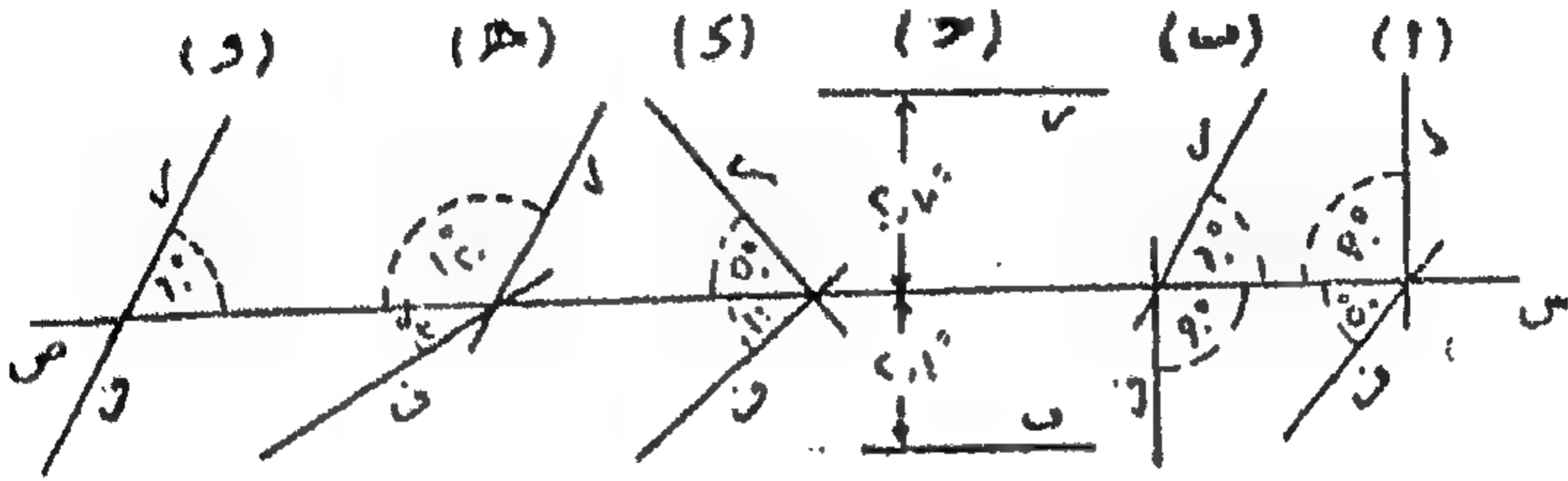
مسألة — (١٨) طريقة رسم مستوي يوازي مستوي آخر معلوم ويبعد

عنه ببعد معلوم

حل هذه المسألة هو عكس المسألة السابقة . يُقطع اثرى المستوى المعلوم بمستوي ثالث عمودى على المستوى الافقى واثره الافقى عمودى على اثر المستوى المعلوم ثم ايجاد خط التقاطع ودورانه الى أن ينطبق على المستوى الرأسى ورسم مستقيم مواز له ويبعد عنه بالبعد المعلوم فيكون هو خط تقاطع المستوى الثانى المطلوب بالمستوى العمودى بعد انطباقه على المستوى الافقى ويمكن بذلك ايجاد اثرى المستوى الثانى الذى يحتوى على الخط الاخير وكل العمليات واضحة فى رسم الشكلىين السابقين (١٦١) و (١٦٢) وهو المطلوب

## تمهيد (٤)

على المستويات الفراغية بالنسبة لمستوى المسقط



(شكل ١٦٣)

(١) شكل ١٦٣ يبين أثرى مستوى معلوم في حالات  $٩٠^\circ$  و  $٤٥^\circ$  و  $٦٠^\circ$  و

والمطلوب تعيين زاوية ميل المستوى في كل حالة على كل من مستويي المسقط

(٢) بين مقدار الزاوية الحقيقية بين أثرى المستوى في الحالات  $٩٠^\circ$  و

شكل (١٦٣)

(٣) بين مقدار الزاوية الحقيقية بين أثرى المستوى في الحالات  $٩٠^\circ$  و

شكل (١٦٣)

(٤) ارسم أثرى المستوى الذي يميل مع المستوى الأفقى بزاوية مقدارها  $٦٠^\circ$  والذي يميل أثره الرأسى بزاوية  $٤٥^\circ$  مع خط الأرض

(٥) ارسم أثرى المستوى الذي يميل مع المستوى الرأسى بزاوية  $٥٠^\circ$  والذي يميل أثره الرأسى مع خط الأرض بزاوية مقدارها  $٥٠^\circ$

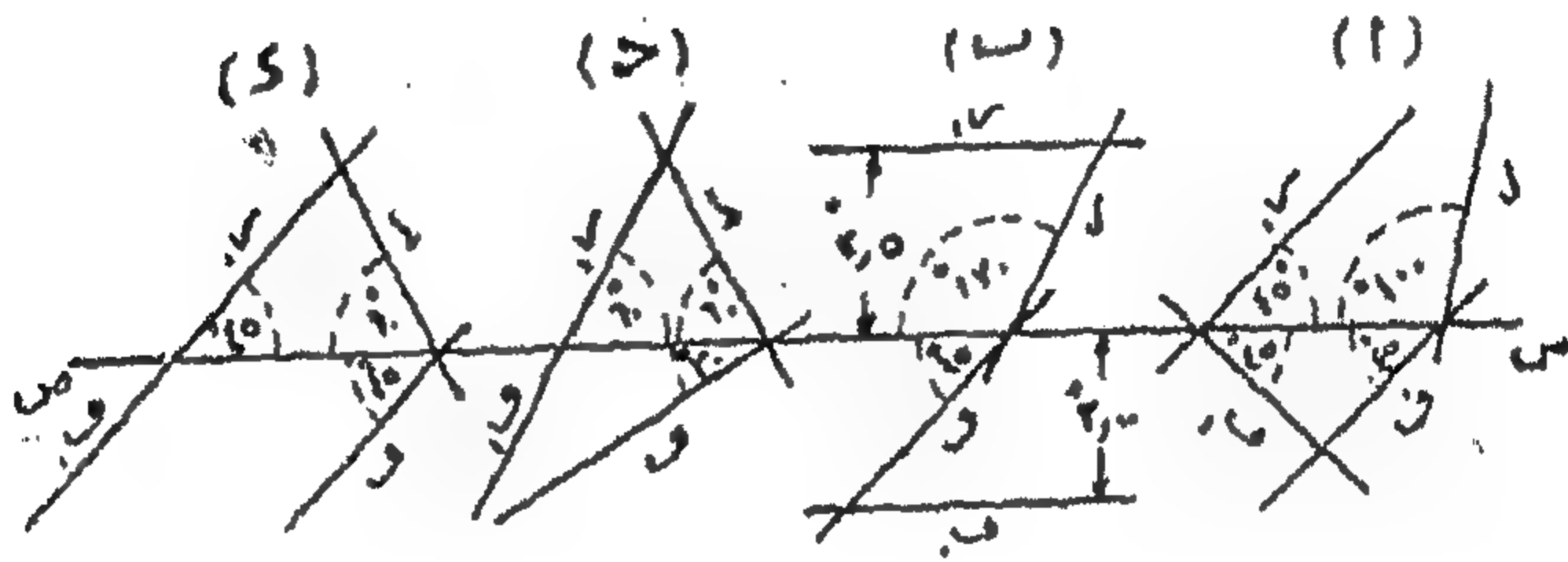
(٦) ارسم أثرى المستوى الذي يميل مع المستوى الأفقى بزاوية  $٥٥^\circ$  والذي أثره الرأسى يوازي خط الأرض ويبعد عنه بمقدار ٥ سم

(٧) ارسم أثرى المستوى الذي يميل على المستوى الأفقى والرأسى بزاويتين  $٥٥^\circ$  و  $٦٠^\circ$  على التوالي

(٨) ارسم أثرى المستوى الذي يميل على كل من المستويين الأفقى والرأسى بزاويتين  $٥٠^\circ$  و  $٤٠^\circ$  على التوالي

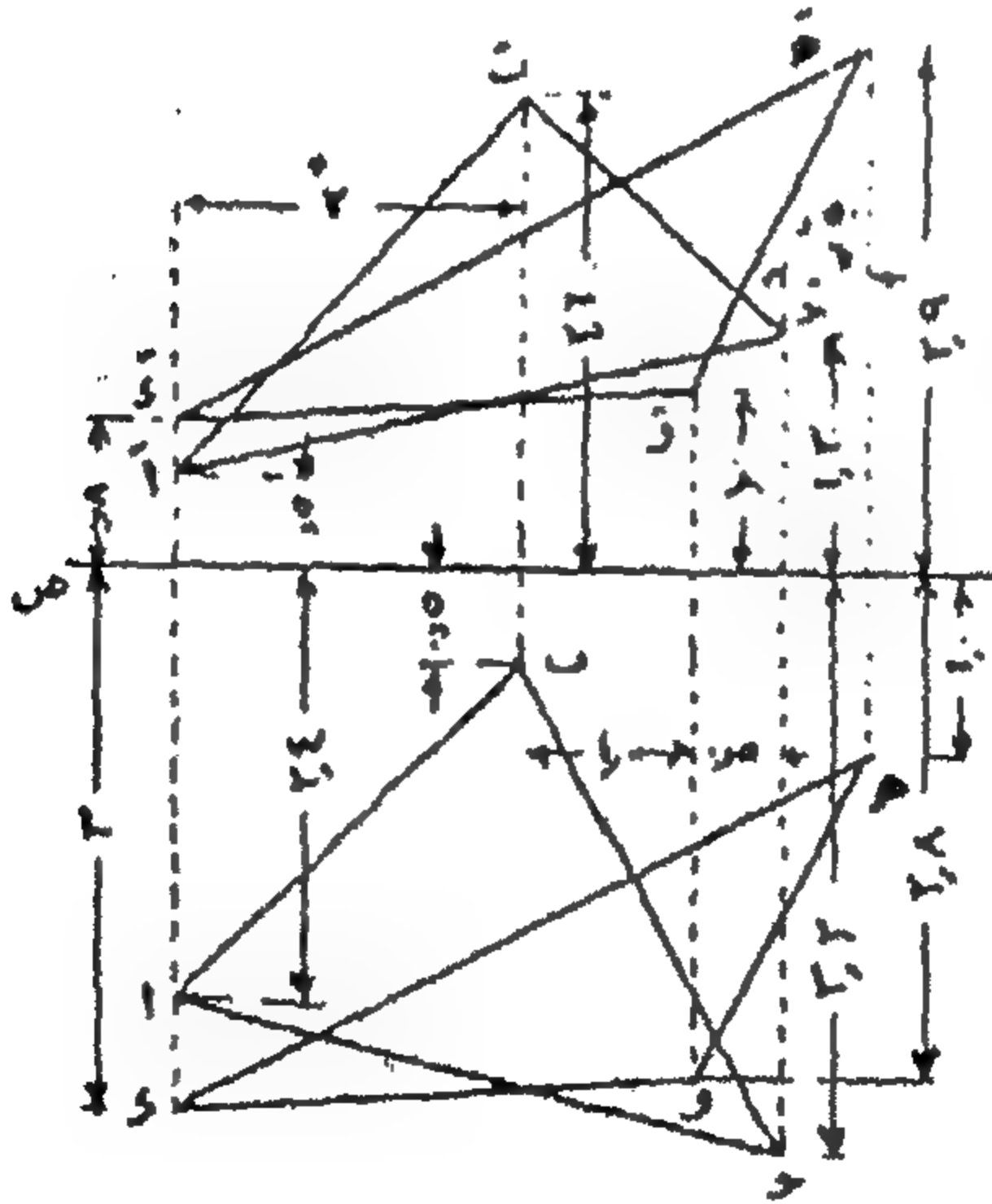
(٩) إذا كانت الزاوية الحقيقية بين أثرى مستوى هي  $٦٠^\circ$  و يميل أثره الرأسى

- بالزاوية  $35^\circ$  مع خط الارض . المطلوب رسم اثرى هذا المستوى
- (١٠) ارسم اثرى المستوى الذى يميل مع المستوى الافقى بزاوية  $50^\circ$  اذا كانت الزاوية الحقيقية بين اثريه هي  $70^\circ$
- (١١) ارسم اثرى المستوى المتساوى الميل على كل من مستويي المسقط اذا كانت الزاوية الحقيقية بين اثريه هي  $60^\circ$



(شكل ١٦٤)

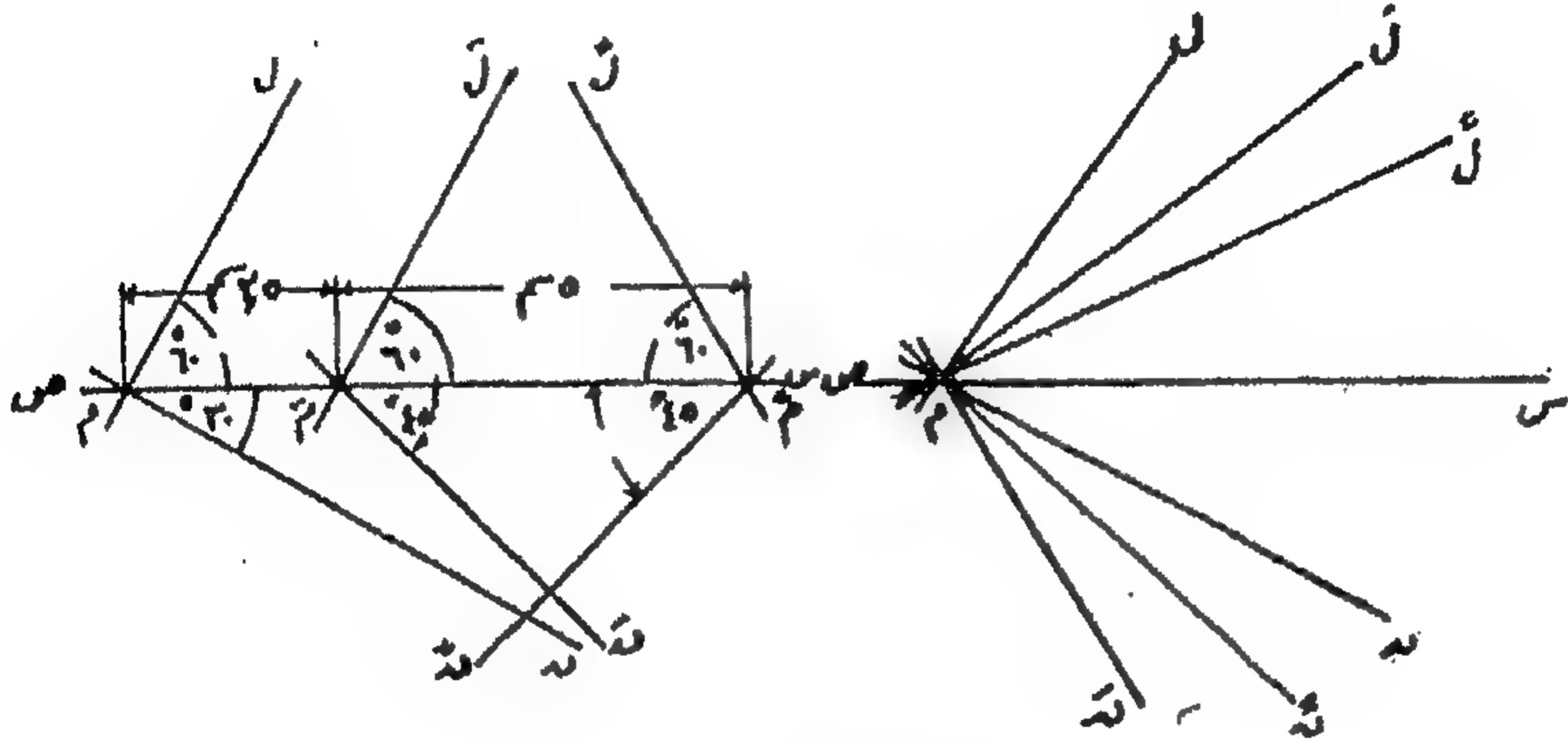
- (١٢) شكل ١٦٤ يبين مستويين متقاطعين في الحالات ا ب ج د هـ و أوجد في كل حالة منها المسقط الرأسى والافقى لخط تقاطع المستويين



(شكل ١٦٥)

- (١٣) أوجد خط تقاطع المثلث المستوي آ ب ج د هـ شكل ١٦٥ مع المثلث المستوي د هـ وى وهو يفرض أن الابعاد المبينة بالشكل كلها بالبوصة

(١٤) أوجد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المتقاطعة المبينة في شكل (١٦٦) و في شكل ١ يمكن انتخاب أى ميل ملائم للآثرات الست بالنسبة لخط الأرض



شكل (١٦٦)

(١٥) المفروض مستويان متوازيان وموازيان لخط الأرض وكان الآثر الاقوى للأول تحت خط الأرض بمقدار ٧ سم والآثر الاقوى للثاني تحته بمقدار ٥ سم وكان الآثر الرأسى للأول فوق خط الأرض بمقدار ٥ سم

أوجد الآثر الرأسى للثاني والبعد بين المستويين في الفراغ

(١٦) ارسم المستوى الذى يوازي المستوى في كل حالة من الحالات ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ وفي المسألة نمرة ١ ويبعد عنه بمقدار ٢ سم



## الفصل السابع

### في الخط المستقيم والمستوى

٢٨ — نبدأ هذا الباب بذكر نظريتين هامتين وهما :

النظرية الأولى — كل مستوي يحتوي على خط مستقيم يحتوي أثره على أثر هذا الخط

البرهان — أثرا الخط المستقيم هما نقطتا تقاطعه مع كل من مستويي المسقط ولكنهما أيضا نقطتان من نقط المستوي المحتوي على هذا الخط فيجب إذاً أن يقطع كل من هذين الاثرين على خطي تقاطع المستوي المحتوي عليه مع مستويي المسقط على التوالي أو بمعنى آخر على أثر ذلك المستوي وهو المطلوب

وشكل (١٦٧) المنظور يبين الخط  $AB$  الموجود في المستوي  $LM$  الذي أثره الرأسى والافقى هما  $LM$  و  $LN$  على التوالي ويبين الاثر الرأسى له وهو  $OB$  واقع على  $LM$  وأثره الافقى  $A$  واقع على  $LN$

النظرية الثانية — كل مستقيم يوازي أحد مستويي المسقط فإنه يوازي أيضا أثر أى مستوي يحتوي عليه على نفس مستويي المسقط

فشكل (١٦٧) المنظور يبين الخط  $CD$  (الذي يوازي المستوي الافقى) وموجود في المستوي  $LM$  وفيه الخط  $CD$  لا بد وأن يوازي  $LN$  وهو أثر المستوي  $LM$  على المستوي الافقى وهذا لان  $CD$  ما هو إلا خط مستقيم موجود في المستوي الافقى فلا يمكن ان الخط  $CD$  يلاقيه أبداً لانه يوازي المستوي الافقى وهو المطلوب وعلى هذا يستنتج : —

أولاً — أن  $LM$  والمسقط الأفقى للمستقيم  $CD$  يوازي  $LN$  أيضاً ( نظرية ١٢ نتيجة ٢ )

ثانياً — أن  $LM$  ومسقطه الرأسى يوازي خط الأرض لأن  $CD$  خط أفقى

ثالثاً — أن الخط  $CD$  ليس له الا أثر رأسى فقط لانه لا يقابل المستوي الافقى

وكل هذا واضح في الشكل

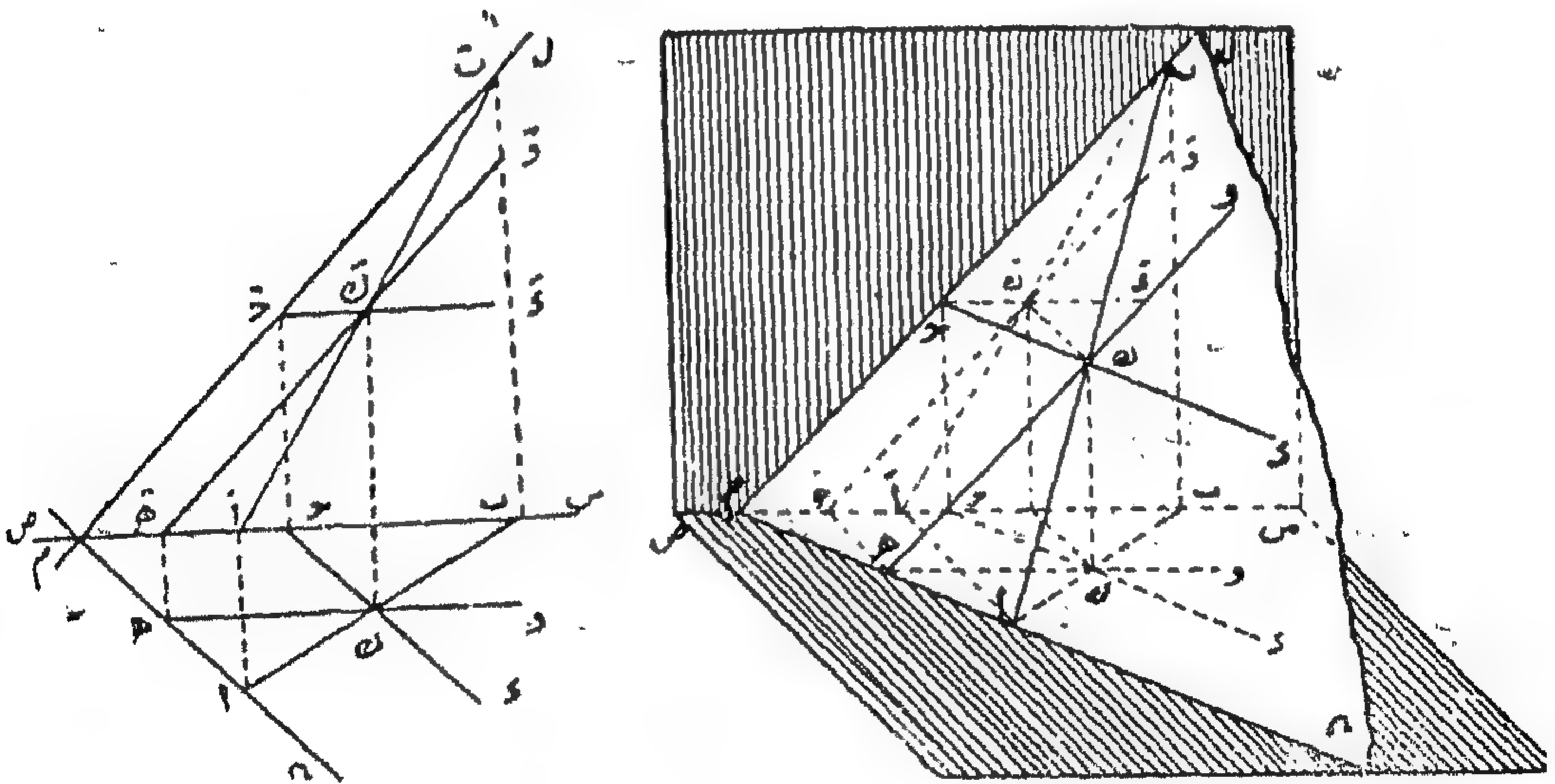


وفي الشكل ١٦٧ أيضا نرى أن الخط  $د ه$  يوازي المستوى الرأسى وموجود في المستوى  $ل م ن$  ويستنتج كما تقدم أنه

أولا — أن هذا الخط يوازي الاثر الرأسى  $ل م$  للمستوى المحتوى عليه  
ثانيا — أن المسقط الرأسى لهذا الخط يوازي الاثر الرأسى للمستوى  $ل م ن$   
ثالثا — أن المسقط الأفقى لهذا الخط يوازي خط الأرض لأنه يوازي المستوى الرأسى

رابعا — أنه ليس لهذا الخط أثر أفقى لأنه لا يقابل المستوى الرأسى  
ملاحظة — سيرى الطالب أنه كثيرا ما يرجع الى النظريتين المتقدمتين عند حل كثير من المسائل المستقبلية

مسألة (١٩) : المفروضة المستوى  $ل م ن$  كاهى المسقط الأفقى  
لنقطة ما على هذا المستوى والمطلوب تعيين مسقطها الرأسى شكل (١٦٧)



شكل (١٦٧)

العمل — الطريقة الاولى — نرسم الخط  $اب$  يمر بالنقطة  $ك$  المفروضة ونعده ليقطع الاثر الأفقى للمستوى في  $ا$  ويقطع خط الأرض في  $ب$  فإذا اعتبرنا أن  $ا ب$  هو

المسقط الأفقي لخط مستقيم مار بالنقطة ك فإن أثره الأفقي هو  $a$  ونقطة  $a$  هي المسقط الأفقي لأثر الرأس فمن السهل إيجاد المسقط الرأسى لهذا الخط وهو  $a'$  ولا بد أن يكون المسقط الرأسى للنقطة ك على  $a'$  ويمكن إيجادها بإسقاطها من ك ولتكن  $a''$  وهو المطلوب انظر الطريقة موضحة بالشكل ١٦٧

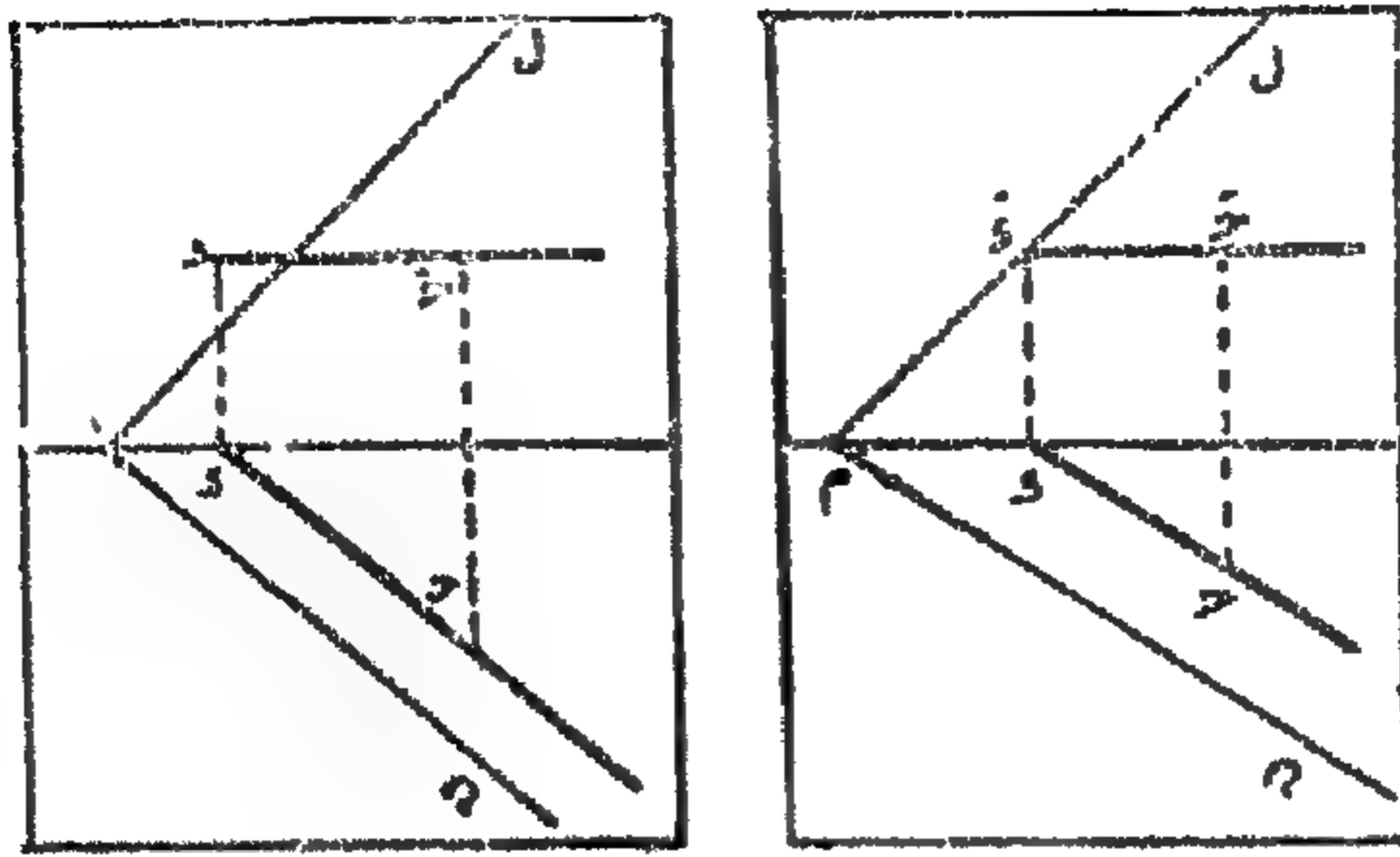
الطريقة الثانية — يمكن بدلا من رسم أى مستقيم مثل  $a$  يمر بالنقطة ك أن نرسم مستقيما مثل  $a'$  يمر بها بحيث يوازي الاثر الأفقى للمستوى وهو  $m$  ونعده الى أن يقابل خط الارض فى  $a$  وحيث أن  $a'$  يوازي  $m$  به يكون مستقيما أفقيا ويكون مسقطه الرأسى موازيا لخط الارض وبما أنه يمكن إيجاد أثر الرأسى بإقامة عمود من  $a$  على خط الارض ليقابل الاثر الرأسى للمستوى  $m$  فى  $a'$  فاذا رسمنا من  $a$  خط يوازي خط الارض مثل  $a''$  يكون  $a''$  هو المسقط الرأسى للخط  $a$  الذى يحتوى على المسقط الرأسى للنقطة ك ويكون من السهل إيجاد مسقطها الرأسى وهو  $a'$

الطريقة الثالثة — يمكن أخذ مستقيم موازى للمستوى الرأسى كالمستقيم  $h$  و يمر بالنقطة ك فيكون مسقطه الرأسى  $h'$  موازيا للأثر الرأسى  $m$  وهو يحتوى على المسقط الرأسى للنقطة ك فيمكن إيجاد مسقطها الرأسى شكل ١٦٧ وهو المطلوب

ملاحظة (٢٨) طريقة رسم منقطى خط افقى فى مستو معلوم من نقطة معلومة عليه

المفروضه : المستوى  $m$  شكل (١٦٨) ونقطة  $a$  موجودة عليه ومسقطها الأفقى  $a'$  والرأسى  $a''$  والمطلوب رسم المسقط الأفقى والرأسى لخط مستقيم يوازي المستوى الأفقى وموجود فى المستوى  $m$  ويمر بالنقطة  $a$

الحل — من النقطة  $a$  وهى المسقط الأفقى لنقطة  $a$  نرسم مستقيما موازيا للأثر الأفقى  $m$  به وليكن  $a'$  ومن النقطة  $a'$  نرسم مستقيما موازيا لخط الارض وليكن  $a''$  فيكون  $a''$  هما المسقطان الأفقى والرأسى للخط المطلوب على التوالى شكل (١٦٨) وهو المطلوب



شكل (١٦٩)

شكل (١٦٨)

البرهان — معلوم ان كل خط أفقى مسقطه الرأسى موازيا لخط الارض وحيث أنه يمر بالنقطة ح فلا بد وأنه يمر بمسقطها الرأسى ح<sup>ـ</sup> ومعلوم أيضا ان كل خط أفقى موازيا للمستوى الاتقى وأن مسقطه الافقى ح<sup>ـ</sup> لابد وأن يوازى م<sup>ـ</sup> الاثر الأفقى للمستوى ل م<sup>ـ</sup> به المحتوى عليه ( النظرية الثانية صفحة ٥ وحيث أن ح<sup>ـ</sup> هو مسقط خط يمر بالنقطة ح فلا بد وأن يمر بمسقطها الافقى ح وهو المطلوب

نتيجة (١) حيث أن الخط ح<sup>ـ</sup> فى المستوى ل م<sup>ـ</sup> به فلا بد وأن يكون أثره الرأسى على الاثر الرأسى للمستوى ل م<sup>ـ</sup> به وواضح من الشكل أن النقطة د<sup>ـ</sup> هي الاثر الرأسى للخط ح<sup>ـ</sup> وموجودة على ل م<sup>ـ</sup> أما الاثر الأفقى لهذا الخط فلا يوجد على الاثر الاتقى للمستوى لانه مواز للمستوى الاتقى ولا يقابله أبدا

نتيجة (٢) يمكن بواسطة هذه العملية إيجاد احدى مسطقتى نقطة موجودة فى المستوى ل م<sup>ـ</sup> به معلومية المسقط الثانى لها كما ذكر فى العملية السابقة

مسألة (٢٩) — طريقة رسم مسطقتى خط أفقى مواز للمستوى ل م<sup>ـ</sup> د من نقطة خارجة عنه

المفروض المستوى ل م<sup>ـ</sup> د والنقطة ح<sup>ـ</sup> خارجة عنه ومسقطها الافقى ح<sup>ـ</sup> والرأسى ح<sup>ـ</sup> (شكل ١٦٩)

والمطلوب : رسم مسقطي خط مستقيم أفقي يمر بالنقطة ح و يوازي المستوى ل م ن  
العمل — من ح المسقط الأفقي للنقطة ح نرسم مستقيما موازيا للآثار الأفقي ن  
ومن ح المسقط الرأسى للنقطة ح نرسم مستقيما موازيا الى خط الارض وليكن ح د  
فيكون ح د و ح د هما المستطان الأفقي والرأسى للخط وهو المطلوب

البرهان — حيث أن الخط ح د خط افقي فلا بد وأن مسقطه الرأسى يوازي  
خط الارض وبما أن هذا الخط يمر بالنقطة ح فلا بد وأن مسقطه الرأسى يمر بالمسقط  
الرأسى للنقطة ح أى يمر بالنقطة ح وكذا المسقط الأفقي لهذا الخط لابد وأن يوازي  
المسقط الأفقي لخط افقي يوازيه مثل م ن وأن يمر بالمسقط الأفقي للنقطة ح أى يمر  
بالنقطة ح

ملاحظة — فقط يراعى في هذه العملية أن الآثار الرأسى للخط ح د وهو د  
لا يقع على أثر المستوى ل م ن لانه ليس موجودا في هذا المستوى وهذا واضح بالشكل  
مسألة ٣٠ — طريقة إيجاد امرى مسقطى أى شكل مستو موجود في

مستو معلوم ومعلوم مسقطه التالى

المفروض — المستوى ل م ن والمسقط

الأفقي ا ب ح المثلث ا ب ح الموجود في هذا

المستوى شكل (١٧٠)

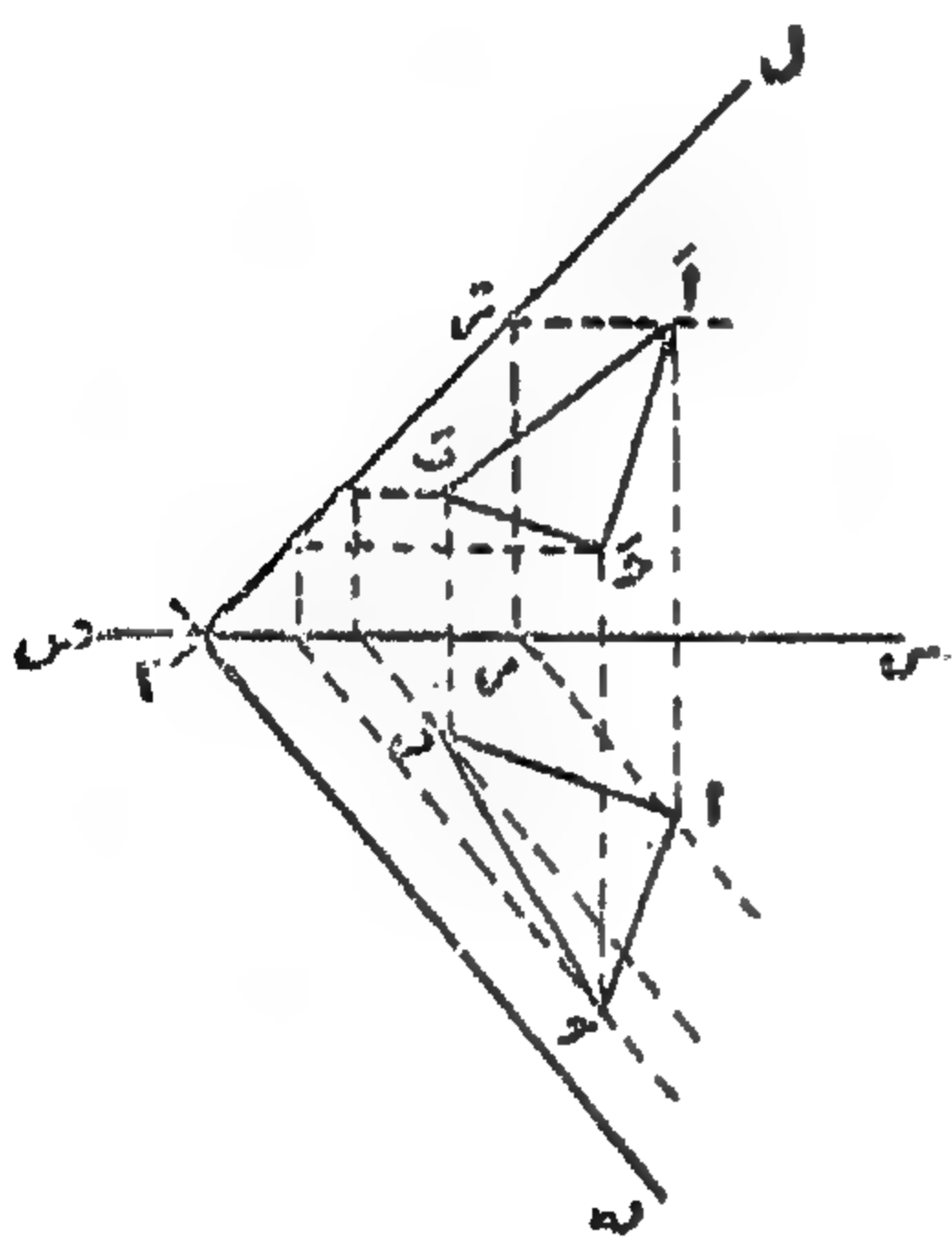
والمطلوب إيجاد المسقط الرأسى لهذا

المثلث

العمل — معلوم أنه اذا تصورنا خط أفقي

يمر بالنقطة ا يكون أولا مسقطه الأفقي

مواز للآثار الأفقي م ن وأثره الرأسى موجود على الآثار الرأسى ل م المستوى ل م ن  
فاذا رسمنا خطا من النقطة ا يوازي م ن ومددناه الى أن يقابل خط الارض فى م



(شكل ١٧٠)

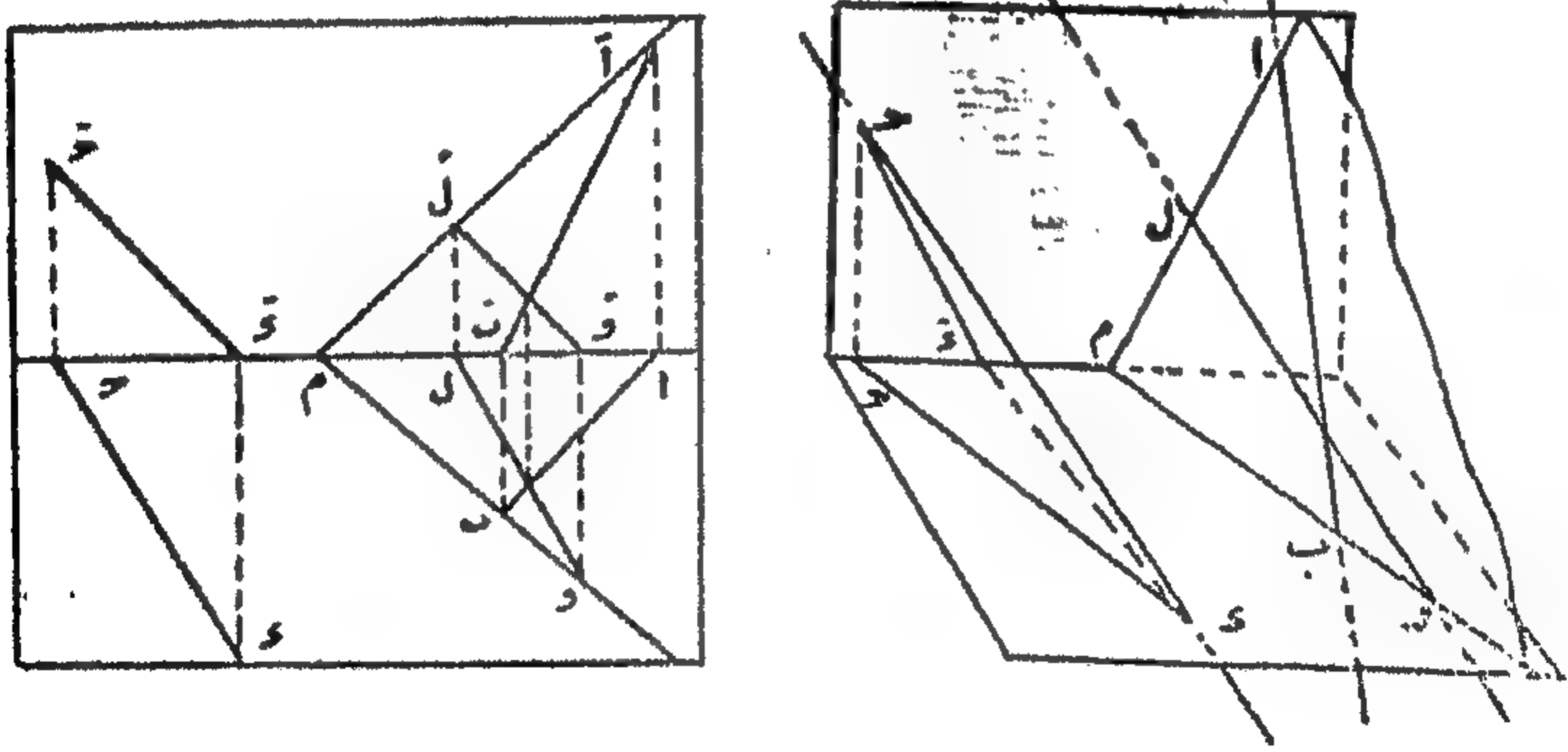
ومن  $\alpha$  أقننا العمود  $\alpha$  على خطه الأرض ليقابل  $\alpha$  في نقطة  $\alpha$  تكون  $\alpha$  هي الأثر  
الرأسي لهذا الخط ويكون مسقطه الرأسى هو المستقيم  $\alpha$  مواز لخط الأرض والمسقط  
الرأسى للنقطة  $\alpha$  واقع عليه فبقامة العمود من  $\alpha$  على خط الأرض وهذه إلى أن يقابل  
 $\alpha$  في  $\alpha$  تكون  $\alpha$  هي المسقط الرأسى للنقطة  $\alpha$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد المسقط الرأسى لكل من  $\beta$  و  $\gamma$  فينتج المسقط  
الرأسى المثلث  $\alpha\beta\gamma$  وهو المطلوب

نتيجة (١) يمكن بنفس الطريقة إيجاد المسقط الأفقى للمثلث  $\alpha\beta\gamma$  إذا علم  
المسقط الرأسى له وهذا واضح ولا يحتاج إلى شرح

ملاحظة — ما ينطبق على المثلث ينطبق على أى شكل آخر معلوم احدى  
مساقط رؤوسه  $\alpha\beta\gamma$  كان عددها

مسألة ٣١ — المعلوم مساقط قطبين أيضا في مستو واحد والمطلوب  
تعيين أثرى المستوى الذى يحتوى على  $\alpha\beta\gamma$  ويوازى الآخر



شكل (١٧١)

المفروضه : أن  $\alpha\beta\gamma$  مستقيمان ليسا في مستو واحد شكل (١٧١)

والمطلوب إيجاد أثرى المستوى الذى يحتوى على المستقيم  $\alpha\beta$  ويوازى المستقيم  $\gamma\delta$

العمل — نعين أثرى المستقيم  $\alpha\beta$  بالطريقة المعروفة واتكن  $\alpha$  هي الأثر

الرأسى له  $\beta$  هي أثره الأفقى كما هو مبين بالشكل



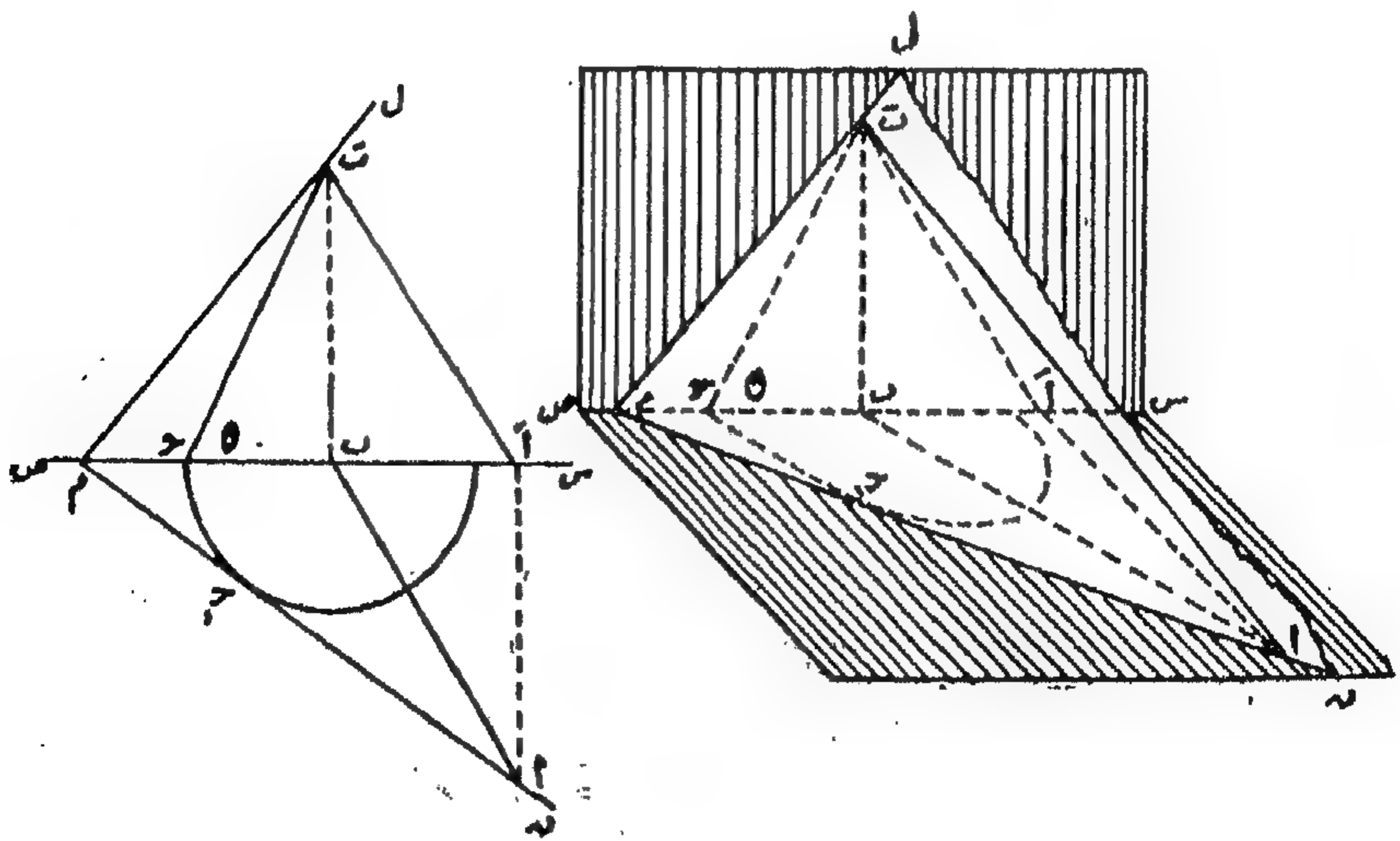
ومن أى نقطة على الخط  $ا ب$  نوسم مسقطى خط يوازي الخط  $ح د$  وليكن  
 $ل و ن$  وهما المسقطان الافقى والرأسى لهذا الخط على التوالى

ثم نعين أثرى الخط  $ل و$  وليكن  $ل و$  وهما أثراه ونصل  $آ ل و ب$  فيكوناهما  
 الاثرين الرأسى والافقى للمستوى المطلوب ولا بد من تقابلهما فى النقطة  $م$  على خط  
 الارض

البرهان — حيث أن المستوى يحتوى على الخط  $ا ب$  وعلى الخط الجديد  
 $ل و$  الموازى للمستقيم  $ح د$  فيكون موازيا الى  $ح د$  ومحتويا على  $ا ب$  نظرية (١٠)  
 صفحة (١١) وهو المطلوب

مسألة ٣٢ — طريقة رسم اثرى مستوى يحتوى على خط مستقيم معلوم  
 ويميل بزاوية معلومة على أحد مستويى المسقط

المفروض — أن  $آ ب و ا ب$  هما مسقطا خط مستقيم  $ا ب$  شكل (١٧٢)  
 ولتكن  $\theta$  هى زاوية ميل المستوى المطلوب على المستوى الافقى

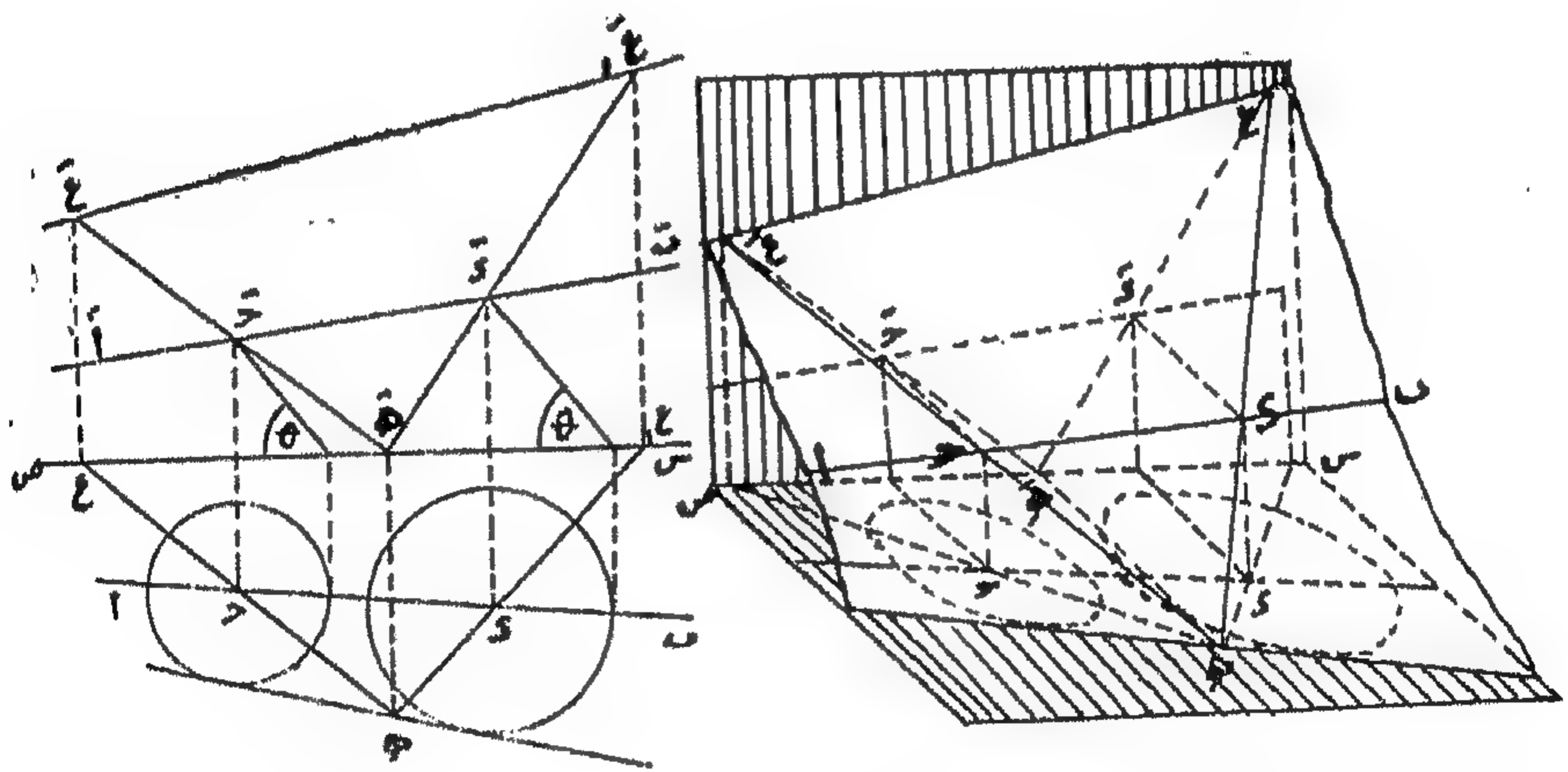


( شكل ١٧٢ )

المطلوب — رسم المستوى الذى يحتوى على  $ab$  ويميل بزاوية  $\theta$  على  
المستوى الافقى

العمل — نعين أثرى المستقيم  $ab$  الرأسى والافقى ولتكن  $c$  أثره الرأسى  
في  $a$  أثره الافقى ثم نرسم مسقطى المخروط الذى رأسه في  $c$  ورأسه يميل  $\theta$  مع خط  
الارض أعنى من  $c$  نرسم الخط  $cd$  يميل بالزاوية  $\theta$  مع خط الارض ثم بنصف  
قطر  $cd$  ونرسم قوسا يكون هو المسقط الافقى للمخروط المطلوب

ومن ان نرسم المستقيم  $am$  ممس القوس في  $m$  يكون  $a$  هو الاثر الافقى للمستوى  
المطلوب لانه ممس قاعدة المخروط ونمده على استقامته الى أن يقابل خط الارض  
في  $n$  ثم نصل  $cn$  يكون هو الاثر الرأسى للمستوى المطلوب والشكل المنظر ١٧٢  
يوضح ما ذكر



( شكل ١٧٢ )

ملاحظة — قد استعنا في حل هذه المسألة بتعيين أثرى الخط المستقيم  $ab$   
المعلوم فاذا وقع الاثر الأفقى  $a$  خارج القوس  $cd$  الذى هو المسقط الافقى للمخروط  
لا يمكن رسم مماسين لهذا القوس وامكن اذا رسم مستويين يفيان بالغرض المطلوب .  
أما اذا وقعت  $a$  على القوس لا يمكن رسم مماس واحد أو بمعنى آخر مستوي واحد

أما إذا وقعت داخل القوس فكانت المسألة مستحيلة الحل  
أما إذا لم يمكن تعيين أثرى المستقيم المعلوم داخل حدود الورقة فيتعذر حل  
المسألة بالطريقة السابقة ويكون العمل كالاتي : —

المفروض — أن أثرى المستقيم  $AB$  شكل ١٧٣ لا يمكن الوصول اليهما  
العمل — نرسم مساقط مخروطين رأسيهما على نقطتين مثل  $CD$  و  $E$  على  
الخط  $AB$  المعلوم وقاعدتيهما على المستوى الافقى ورواسيها تميل بالزاوية  $\theta$  على  
خط الارض فيكون الاثر الافقى للمستوى المطلوب هو المماس المشترك لهاتين القاعدتين  
أما الاثر الرأسى فيتمين بانتخاب نقطة على الاثر الافقى للمستوى مثل  $هـ$  ثم نصل  
هذه النقطة بنقطتين أيا كانتا على المستقيم  $AB$  وليكونا  $د$  و  $ز$

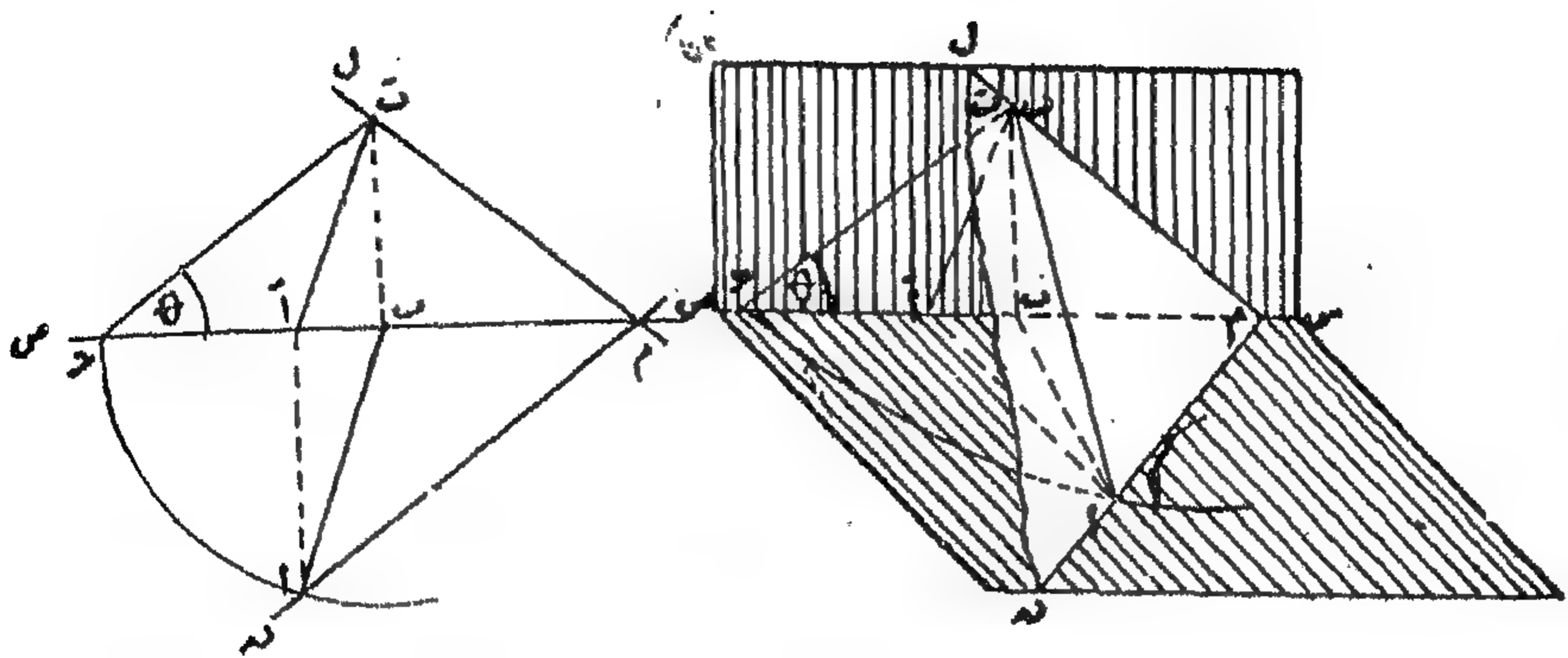
ثم نعين الاثرين الرأسين للخطين  $د هـ$  و  $ز هـ$  وليكونا  $و$  و  $ح$  على التوالي  
فالخط الواصل بين هذين الاثرين  $و ح$  هو الاثر الرأسى للمستوى وهو المطلوب  
مسألة ٣٣ — فى مستو معلوم المطلوب تعيين خط مستقيم يميل  
بزاوية معلومة على أمر مسترربى المسقط ( لا يمكن أن يزيد ميل الخط المستقيم  
عن ميل المستوى )

المفروض — المستوى  $د م هـ$

المطلوب — تعيين مستقيم مثل  $AB$  فى ذلك المستوى ويميل بالزاوية  $\theta$  مع  
المستوى الافقى مثلاً ( شكل ١٧٤ )

العمل — ننتخب نقطة مثل  $د$  على خط الارض ونرسم منها مستقيم مثل  $د ح$   
يميل بالزاوية  $\theta$  على خط الارض ونمده ليقابل الاثر الرأسى للمستوى  $د م هـ$  فى  $ك$   
ثم من  $ك$  نقيم العمود  $د ب$  على خط الارض وبنصف قطر  $د ب$  نرسم قوساً ليقابل  
الاثر الافقى فى  $ا$

ثم نقيم من  $ا$  عموداً على خط الارض ليقابل خط الارض فى  $آ$



شكل (١٧٤)

فيكون  $\alpha$  المسقط الرأسى للمستقيم المطلوب و  $\alpha$  مسقطه الافقى وهو المطلوب  
البرهان : — من الرسم يتضح أن  $\alpha$  هى الأثر الرأسى للمستقيم المطلوب  
ومسقطها الافقى هو  $\alpha$  و  $\alpha$  هو مسقط المستقيم المطلوب بعد دورانه الى أن  
انطبق على المستوى الرأسى فيكون ميله  $\theta$  هو ميله الحقيقى على المستوى الافقى  
وحيث أن نقطة  $\alpha$  على خط الأرض بعد الدوران فتكون أيضا على خط الأرض  
قبل الدوران ويكون مسقطه الافقى بعد الدوران هو  $\alpha$  ولا يتغير هذا الطول قبل  
الدوران وبعده

فيكون اذا  $\alpha$  الذى يساوى  $\alpha$  هو المسقط الافقى للمستقيم قبل الدوران  
وحيث أن  $\alpha$  واقعة على الأثر الأفقى للمستوى  $\alpha$  فيكون نقطتان منه وهما  $\alpha$  و  $\alpha$   
فى المستوى وعليه يكون الخط با كمله فى المستوى ، وهو المطلوب

مسألة ٣٤ — طريقة إيجاد نقطة نهر فى مستقيم معلوم بمستوى معلوم

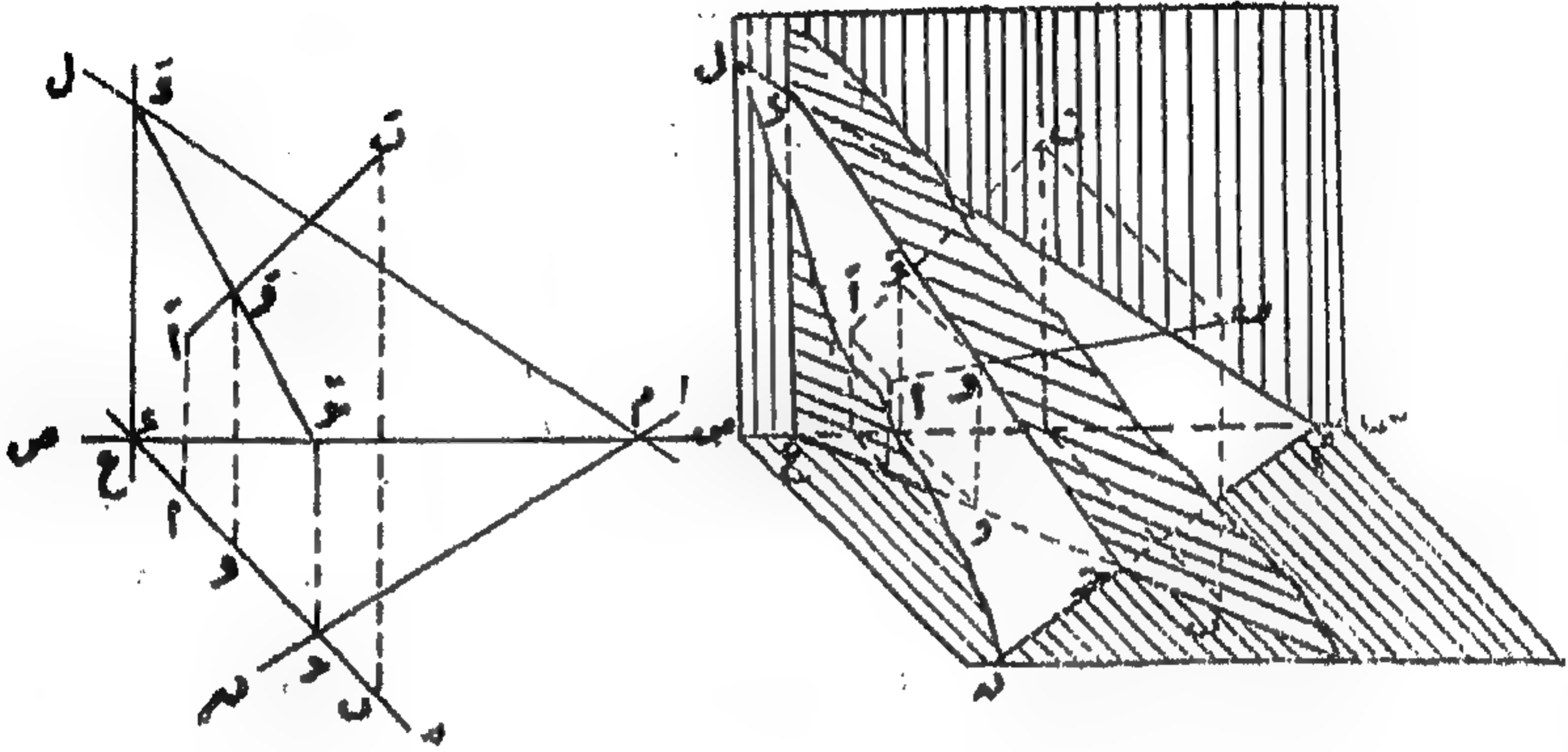
المفروضه : — المستوى  $\alpha$  والمستقيم  $\alpha$  ومسقطه الرأسى  $\alpha$   
والافقى  $\alpha$  شكل (١٧٥)

والمطلوب إيجاد نقطة المستقيم ثلاثى  $\alpha$  بالمستوى  $\alpha$

العمل : — نأخذ مستويا عموديا على احد مستويي المسقط ومحتويا على الخط

$\alpha$  مثل المستوى  $\alpha$  و  $\alpha$  العمودى على الرأسى والذى يحتوى على الخط  $\alpha$  فيحتوى

إذا أثره الافقى على المسقط الافقى للمستقيم  $AB$  ثم نأت بخط تقاطع المستوى  $AM$  مع المستوى  $BC$  وليكن الخط  $CD$  هو خط التقاطع المطلوب ومسقطه الرأسى  $DE$



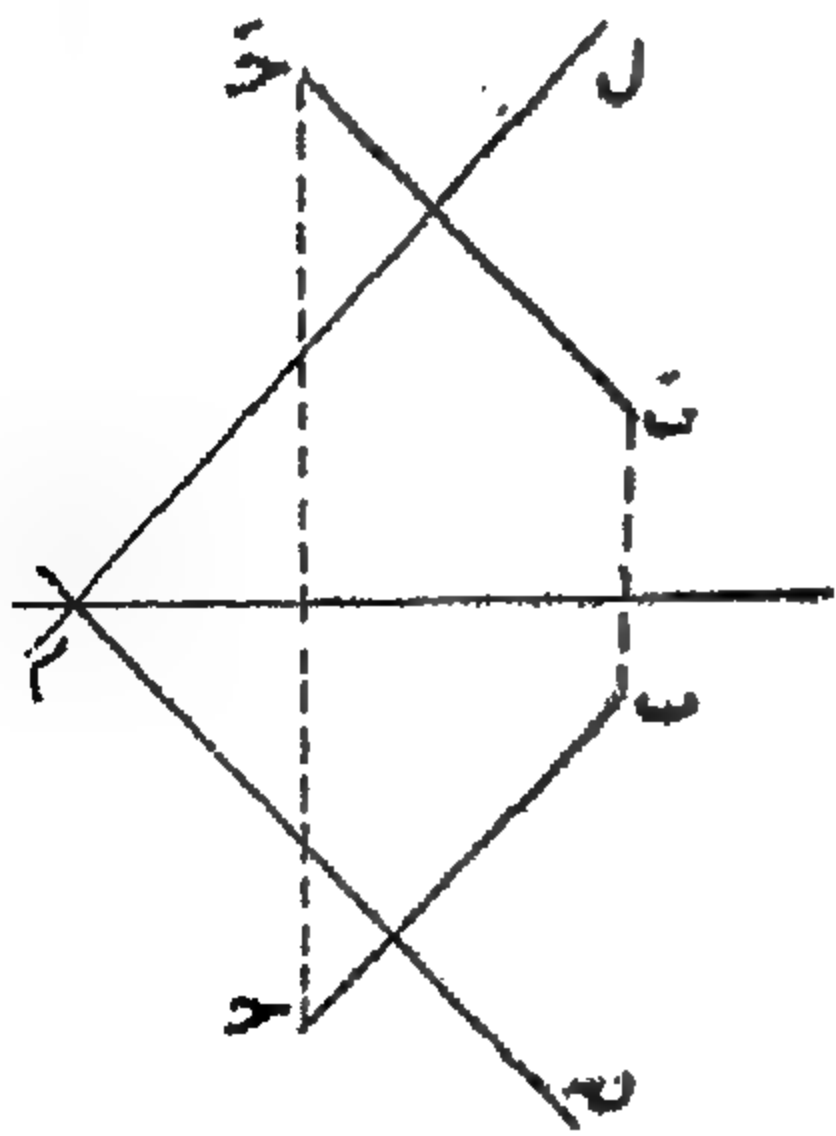
شكل ( ١٧٥ )

فإن نقطة تقاطع  $AB$  و  $CD$  هي نقطة تلاقى المستقيم  $AB$  مع المستوى  $AM$  وهى النقطة  $W$  ومسقطها الرأسى  $W'$  والافقى  $W''$  وهو المطلوب

البرهان : — حيث أن النقطة  $W$  هي نقطة تقاطع الخطين  $AB$  و  $CD$  فهى اذا موجودة على كليهما أى موجودة على  $AB$  وحيث انها موجودة أيضا على  $CD$  فهى موجودة فى المستوى المحتوى على  $CD$  وهو  $AM$  وهى المطلوب

مسألة ٣٥ — طريقة رسم مسطى خط مستقيم عمود على مستوي معلوم

من نقطة خارجة عنه



شكل (١٧٦)

المفروض — المستوى  $AM$  وهى

والنقطة  $B$  ومسقطها  $B'$  شكل ١٧٦

والمطلوب رسم خط مستقيم يمر

بالنقطة  $B$  وعمود على المستوى  $AM$  وهى

الحل — كل خط عمودى على



مستوى يكون مسقطاه عموديين على أثرى ذلك المستوى بمعنى أن يكون مسقطاه الافقى  
عمود على الاثر الافقى للمستوى ومسقطه الرأسى عمود على الاثر الرأسى للمستوى فاذا  
رسم من  $\beta$  المسقط الافقى للنقطة  $\beta$  الخط  $\beta\gamma$  عمودا على  $\gamma$  الاثر الافقى للمستوى  
ل  $\gamma$  ومن النقطة  $\beta$  المسقط الرأسى للنقطة  $\beta$  الخط  $\beta\delta$  عمودا على  $\delta$  الاثر  
الرأسى للمستوى ل  $\delta$  يكون  $\beta\gamma$  و  $\beta\delta$  هما مسقطا الخط  $\beta\gamma$  المطلوب

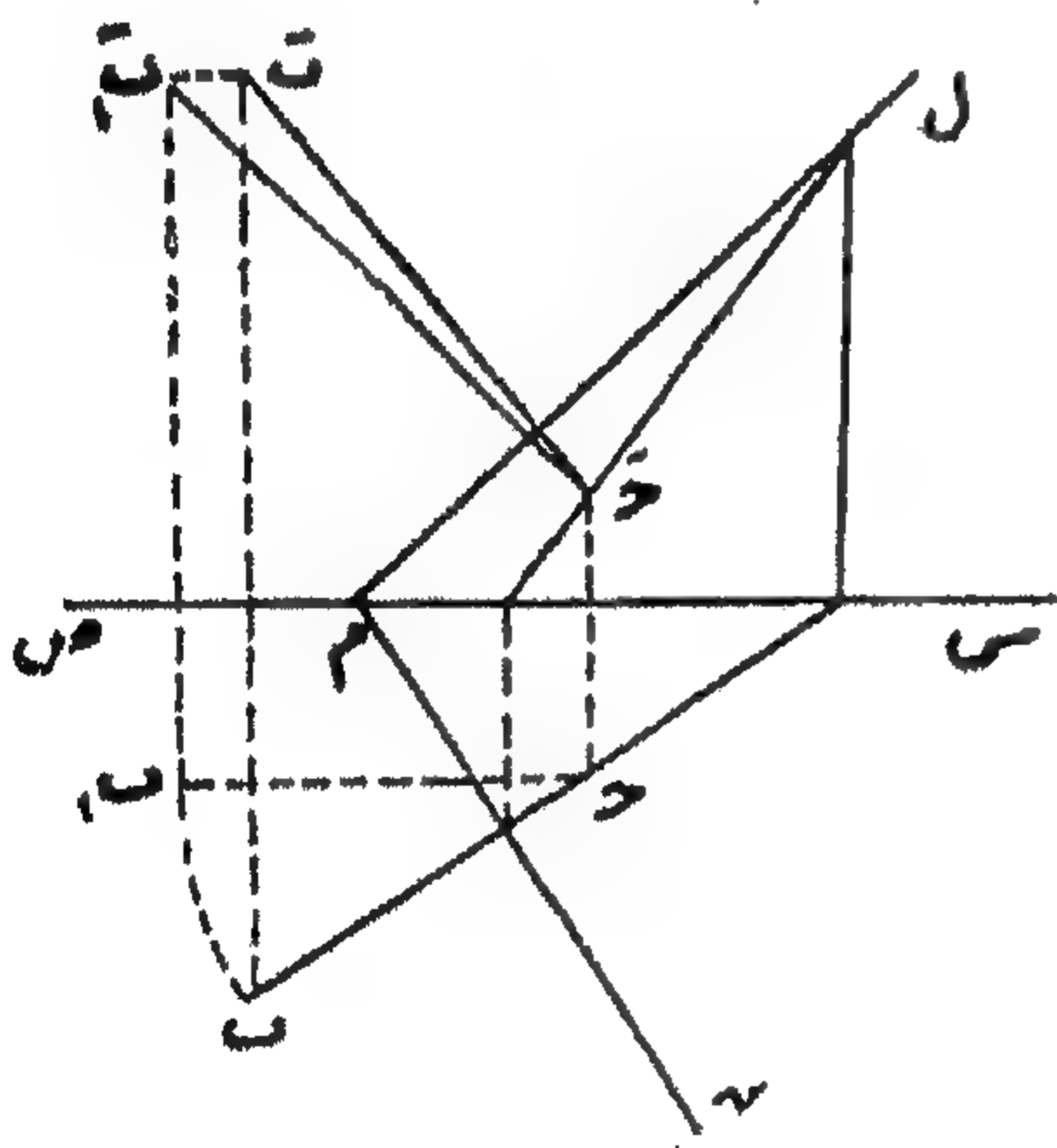
مسألة ٣٦ - تعيين المسافة بين مستوي معلوم ونقطة خارجة عنه

المفروض - المستوى ل م ن والنقطة  $\beta$  خارجة عنه ( شكل ١٧٧ )

والمطلوب تعيين المسافة بين النقطة  $\beta$  والمستوى ل م ن

الحل - نسقط العمود من النقطة  $\beta$  على المستوى ل م ن بالطريقة السابقة

وليكن  $\beta\gamma$  هو العمود من  $\beta$  على المستوى ل م ن ثم نأت بنقطة تقابل



شكل ( ١٧٧ )

هذا العمود مع المستوى ل م ن كما تقدم  
شرحه ولتكن النقطة  $\gamma$  ثم نعين  
الطول الحقيقي للمستقيم  $\beta\gamma$  باحدى  
الطرق السابقة أيضاً فيكون الطول الحقيقي  
هذا هو المسافة بين النقطة  $\beta$  والمستوى  
ل م ن لانه طول العمود منها على المستوى  
وشكل ( ١٧٧ ) يبين ايجاد الطول الحقيقي  
بعد ايجاد نقطة التقاطع وهو الطول  $\beta\gamma$   
وهو المطلوب

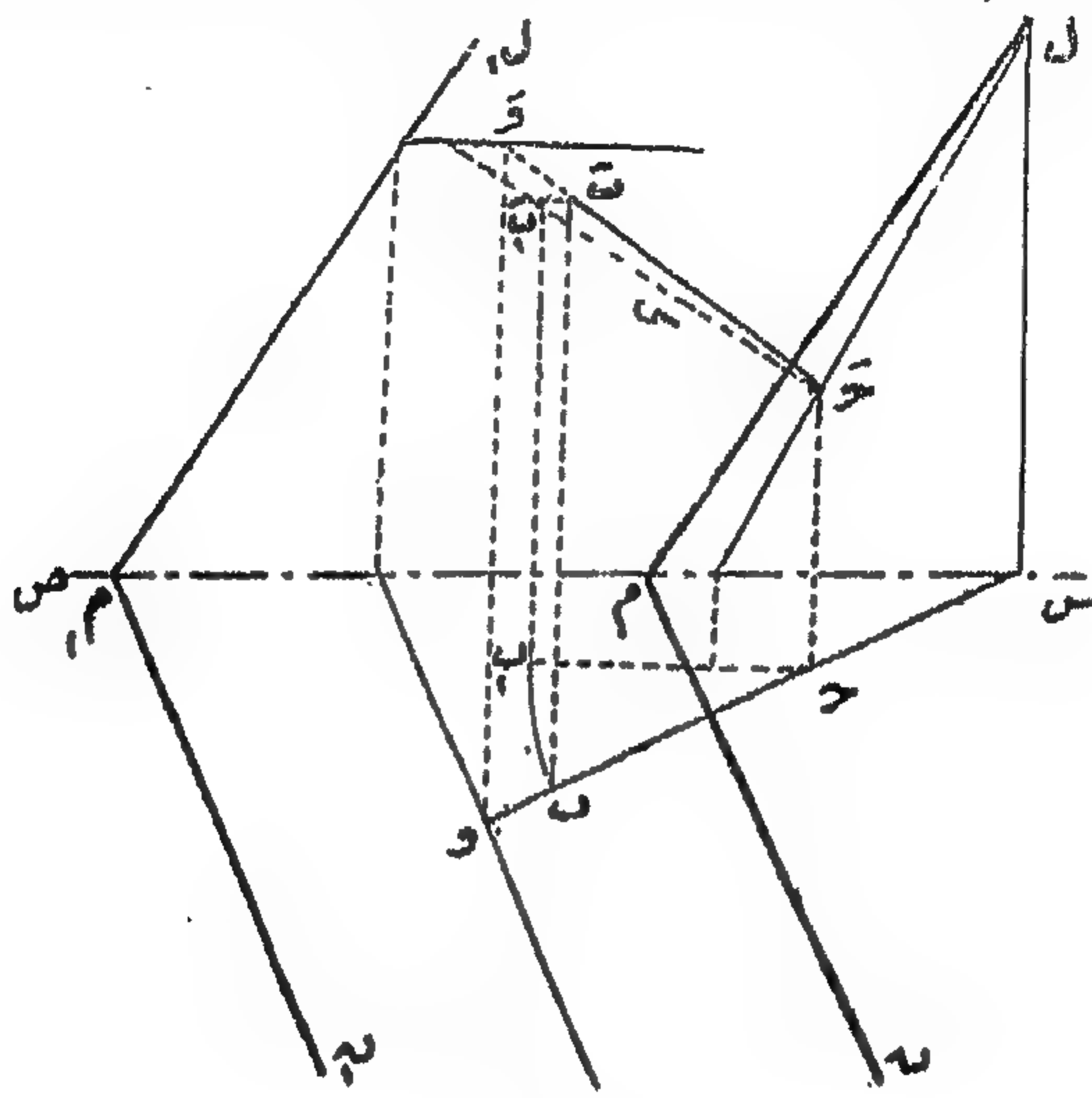
مسألة ٣٧ - المطلوب رسم مستوي يوازي مستوي معلوم ويبعد عنه

ببعد معلوم

سبق أن شرحنا هذه العملية في الباب السابق ولها حل آخر نلخصه فيما يلي

المفروض - المستوى ل م ن ( شكل ١٧٨ )

والمطلوب رسم مستو مثل  $ل م ن$  يبعد بالبعد  $س$  عن المستوى  $ل م ن$



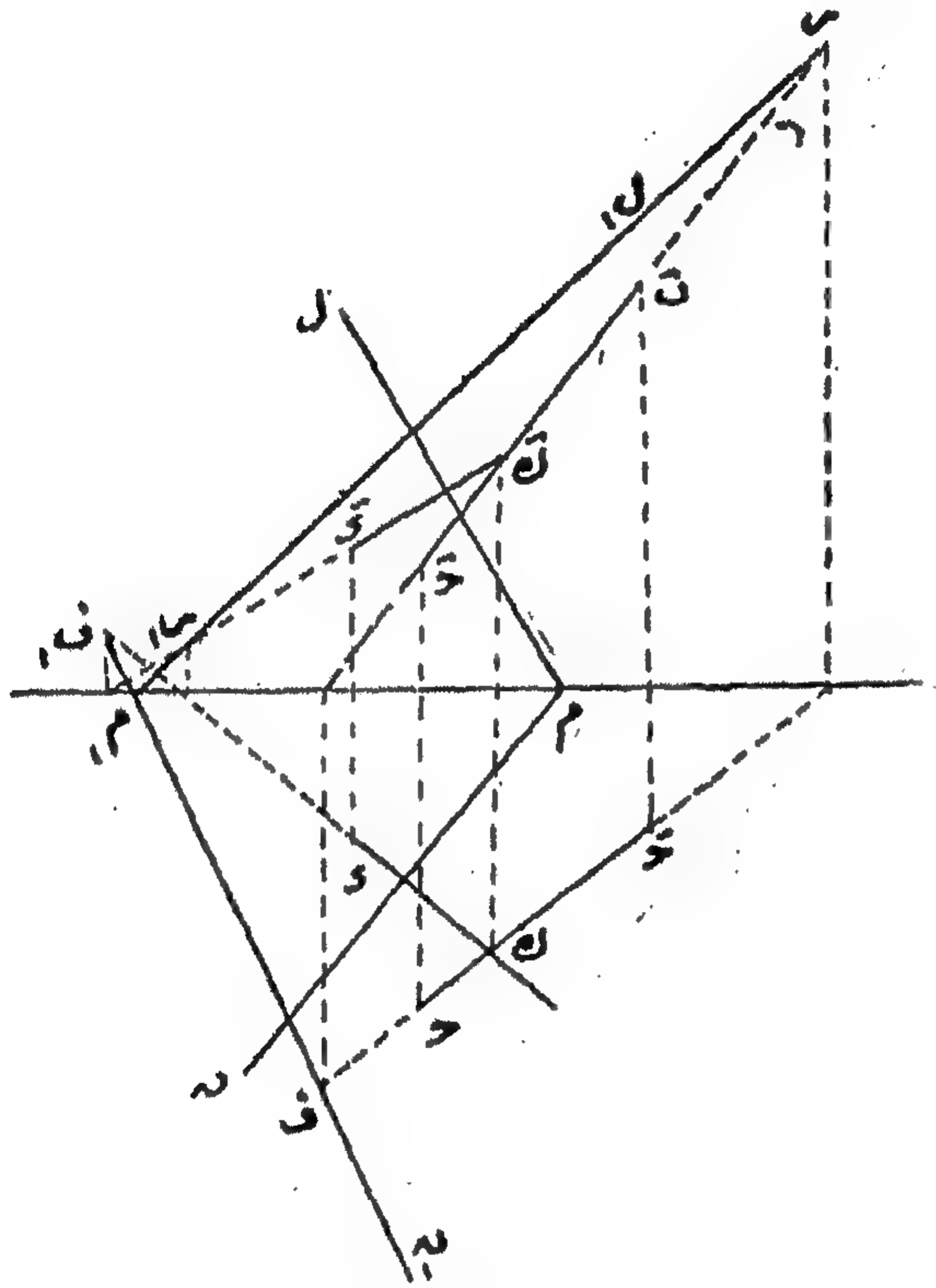
شكل (١٧٨)

العمل : — نرسم من أى نقطة مثل  $ح$  على المستوى  $ل م ن$  وهذه طبعاً يمكن إيجادها برسم أى خط أفقى فى المستوى  $ل م ن$  واختيار نقطة عليه مثل  $ح$  ثم من  $ح$  نقيم العمود  $ح ب$  على المستوى ثم نأخذ على  $ح ب$  ابتداء من  $ح$  بعد حقيقى يساوى المسافة  $س$  وذلك بدوران العمود الى أن يوازى احد مستويى المسقط وأخذ البعد  $س$  على مسقطه الجديد بعد الدوران ثم ارجاعه ثانياً . ولتكن  $و$  هى نهاية الطول الحقيقى المطلوب ومن  $و$  نرسم خطاً أفقياً يوازى المستوى  $ل م ن$  بالطريقة التى سبق شرحها ثم نعين أثر هذا الخط وبمعلومية هذا الاثر نرسم أثرى المستوى الجديد موازىين لأثرى  $ل م ن$  ويمكن ل  $ل م ن$  هو المستوى المطلوب

البرهان — بما أن نقطة  $ح$  فى المستوى  $ل م ن$  و  $و$  فى المستوى  $ل م ن$  وبما أن كليهما على خط مستقيم واحد عمودى على المستوى  $ل م ن$  وبما أن المستوى  $ل م ن$  مستو يوازى المستوى  $ل م ن$  لان أثرى كل منهما متوازيين النظير انظيره فيكون الخط  $و ح$  أيضاً عمود على المستوى  $ل م ن$  وبما أن طول الخط  $و ح$  هو الطول المطلوب فلا بد أن المستويين  $ل م ن$  و  $ل م ن$  يبعدان بالبعد المطلوب عن بعضهما وهو المطلوب

مسألة ٣٨ المطلوب رسم مستوي يحتوي على نقط معلوم ويكون عموديا  
على مستقيم معلوم أيضا

المفروض — المستوي ل م ن والخط ب ح خارج عنه والمطلوب رسم  
مستوي مثل ل م ن يحتوي على ب ح وعمود على المستوي ل م ن شكل ١٧٩



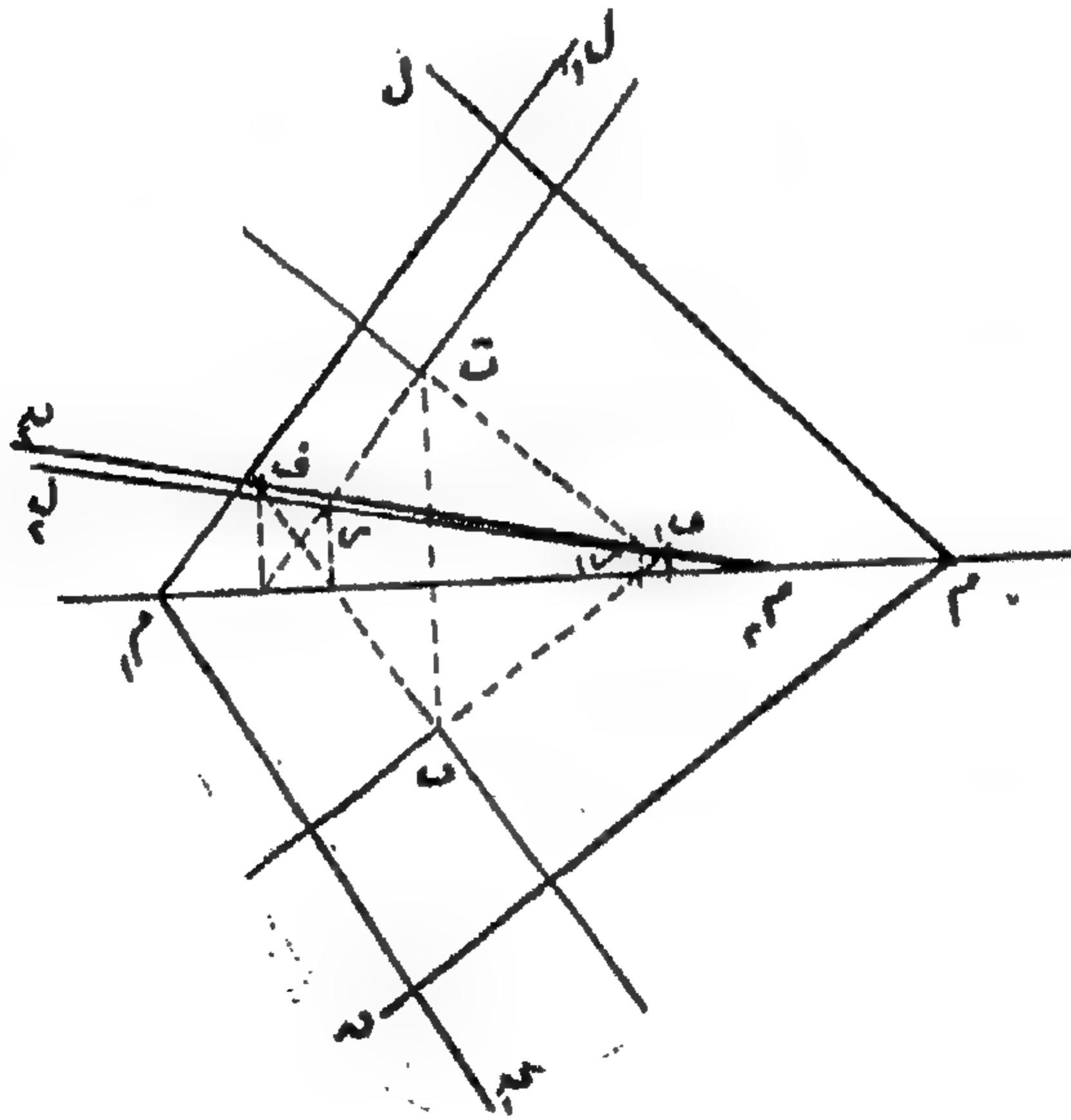
شكل ( ١٧٩ )

العمل — ننتخب نقطة أيا كانت على المستقيم ب ح مثل ك وليكن مسقطاها  
ك . ثم من ك نزل عموداً على المستوي ل م ن وليكن ك د ثم نعين المستوي الذي  
يحتوي على المستقيم ب ح و ك د بتعيين أثرى كل منهما وليكن أثراً ب ح  
هـ ف و أثراً ك د هـ ف و هما ف و وبتوصيل الأثرين الرأسين ببعضهما  
والاثنين ببعضهما ينتج ل م ن وهو المستوي المطلوب

البرهان — نعلم أن كل مستوى يحتوى على خط عمودى على مستوى آخر  
 يكون عموديا على هذا المستوى فبما أن المستوى  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$  رسم محتويا على  $\pi_1$  و  
 عمود على المستوى  $\pi_2$  فالمستوى  $\pi_1$   $\pi_2$  إذا عمود على  $\pi_3$  وهو المطلوب  
 مسألة ٣٩ المطلوب رسم مستوي عمود على مستويين معلومين ويمر  
 بنقطة معلومة

المفروض — المستويين  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$  والنقطة خارجة عنهما والمطلوب  
 رسم مستوي مثل  $\pi_1$   $\pi_2$  يمر بالنقطة  $\pi_3$  وعمود على المستويين  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$   
 شكل ١٨٠

العمل — نرسم من النقطة  $\pi_3$  عمود على كل من المستويين  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$   
 بالطريقة المعروفة ثم نعين المستوى الذى يحتوى على هذين العمودين بعد إيجاد أثرى



شكل ( ١٨٠ )

كل منهما فيكون هذا المستوى وهو  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$  هو المستوى المطلوب  
 البرهان — المستوى  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$  عمود على كل من المستويين  $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$





من النقطة ب وهي المسقط الأفقى للنقطة ب نرسم ب و خطا عموديا على ح و  
المسقط الأفقى للخط ح و فيكون ب و موازيا للأثر الأفقى للمستوى المطلوب  
ويمكننا أن نقول أيضا أنه المسقط الأفقى لخط أفقى فى المستوى المذكور فإذا  
رسمنا خط ب و موازى لخط لارض لكان هذا هو المسقط الرأسى للخط الأفقى  
المذكور فإذا أتينا بأثر هذا الخط بان نمد ب و الى أن يلاقى خط الارض فى ه ومن ه  
نقيم العمود ه ه على خط الارض ليلاقى امتداد ب و فى ه لكانت نقطة ه  
هى الأثر الرأسى للمستقيم ب و وموجودة على الأثر الرأسى للمستوى المطلوب .

فإذا رسمنا من ه خطا عموديا على ح و المسقط الرأسى للخط ح و مثل ه م  
ومددناه الى أن يلاقى خط الأرض فى م لكان ه م هو الأثر الرأسى للمستوى  
وأثره الأفقى هو الخط العمودى من م على ح و المسقط الأفقى للخط ح و وليكن  
م ه وهو المطلوب

البرهان — بما أن ه م و م ه أثرين عمودين على مسقطى الخط ح و على  
التوالى فيكونا أثرى مستو عمود على ح و

وبما أن الخط ب و هو خط أفقى فى ذلك المستوى ويحتوى على ب فيكون  
المستوى ه م ه يحتوى على ب أيضا وهو المطلوب

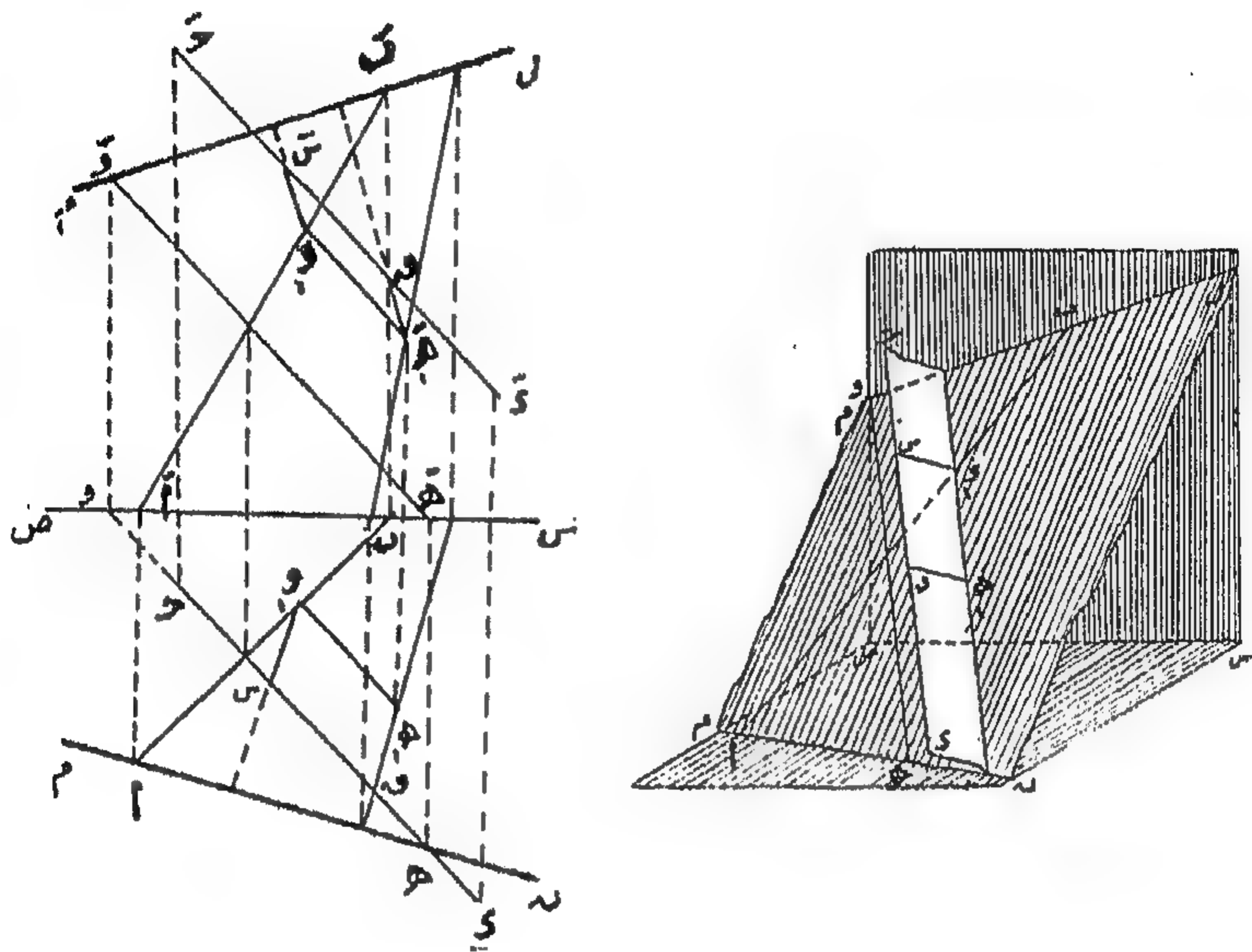
مسألة ٤١ المطلب تعيين العمود المشترك على خطين مستقيمين ليسا  
فى مستو واحد

المقروضه : — أن آ ب ا ب مسقطا الخط اب وأن ح و د ه مسقطا  
الخط ح و اللذين ليسا فى مستو واحد شكل ١٨٢

والمطلب تعيين العمود المشترك على كل من ا ب و ح و

العمل : — نعين أثرى المستوى لـ م — م ه الذى يحتوى على ا ب ويوازى  
ح و مسألة ( ٣١ ) صفحة ١٠٦ ونعين أيضا أثرى المستوى الذى يحتوى على ح و  
وعموديا على المستوى لـ م — م ه بان نرسم من أى نقطتين مثل س و ن على ح و

عمودین مثل ه و و س علی المستوى ل م - م و ن عین مستویهما و ایکن المستوى



شکل (۱۸۲)

لـ مـ هـ الغير مهشـر ثم نعين خط تقاطع المستويين لـ م - مـ هـ و لـ مـ هـ الجديد  
وايكن هـ و هـ و مسقطا خط التقاطع هـ و

ومن نقطة تلاقي هـ و، مع الخط ا ب واتسكن و، نرسم عمودا على المستوى  
لـ م - م هـ مثل و س و س فيكون المستقيم و س هو العمود المشترك المطلوب

البرهان — أولا العمود  $W$  من عمود على المستوى  $U$  —  $M$  الذي يحتوي على  $A$  فيكون عمود على الخط  $AB$  ويكون أيضا عمود على  $H$  و  $W$  وهو خط التقاطع وعليه يكون واقع في المستوى  $U$   $M$   $N$

والکن هو، یوازی حق لاند موجود فی مستوی لم-مہ الذی یوازی حق

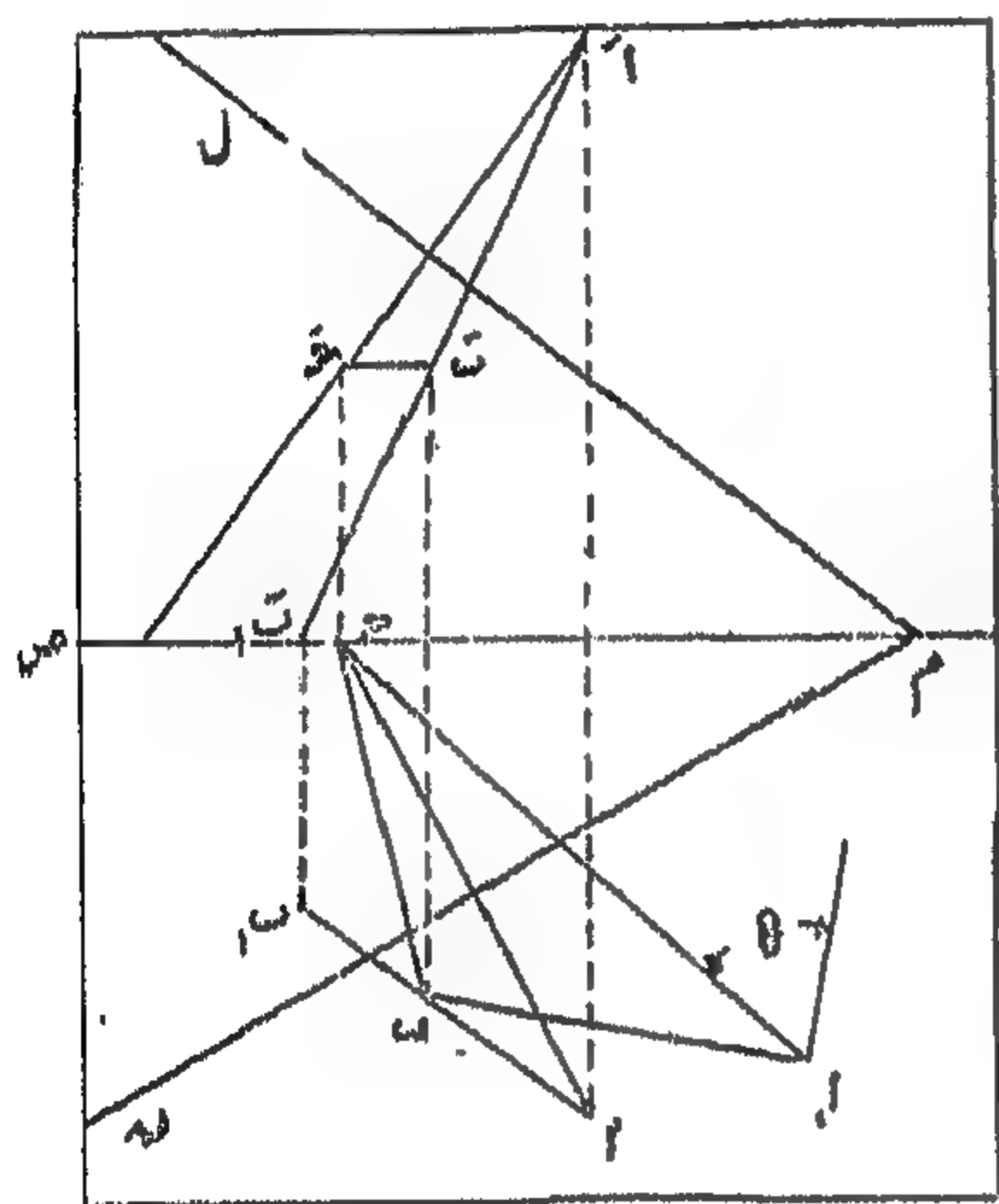
۱۰. و پس عمود علی کل من حی و اب

وشكل ( ١٨٢ ) الغير منظور يبين طريقة العمل

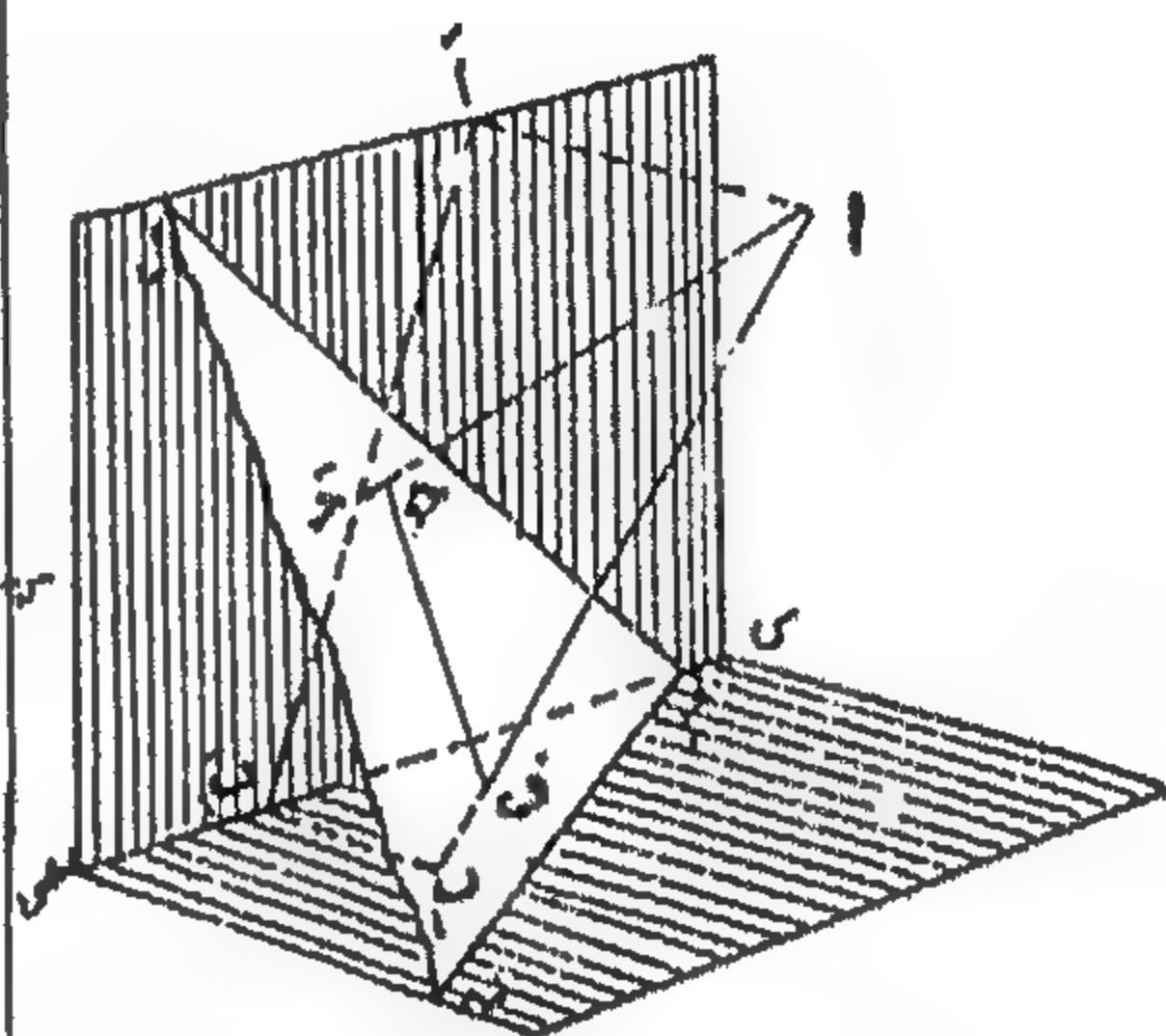
مسألة ٤٢ تعيين ميل مستقيم معلوم على مستو معلوم  
المفروضه -  $آ، ب، ق، د$ ، مسقطا المستقيم  $ا، ب$ ، وأن  $د م و م ه$  أثرا  
المستوى  $د م ه$

والمطلوب : تعيين زاوية ميل المستقيم  $ab$  على المستوى  $\alpha$  له شكلي ١٨٤٦١٨٣

العمل من أى نقطة مثل  $a$  على المستقيم  $ab$  نزل العمود  $ac$  على المستوى  $\alpha$  له



183



145

مسألة ٣٥ ثم نعين الزاوية المحصورة بين  $ab$  و  $ac$  وليكن زاوية  $ba$  ح  
فتكون الزاوية المتممة لها  $\theta$  هي الزاوية المطلوبة

البرهان - لتكن نقطتا  $F$  و  $H$  هما نقطتا تقاطع كل من  $AB$  و  $AC$  مع المستوى  $LMN$  على التناظر شكل ١٨٣ فيكون  $FH$  هو مسقط المستقيم  $AB$  على المستوى  $LMN$  وعليه تكون الزاوية  $AHF$  هي الزاوية المطلوبة (تعريف ١٨)

ولكن  $AHF$  زاوية قائمة

∴  $a_f = 90 - f_a = 90 - 184$  وهو المطلوب وشكل ١٨٤ يبين

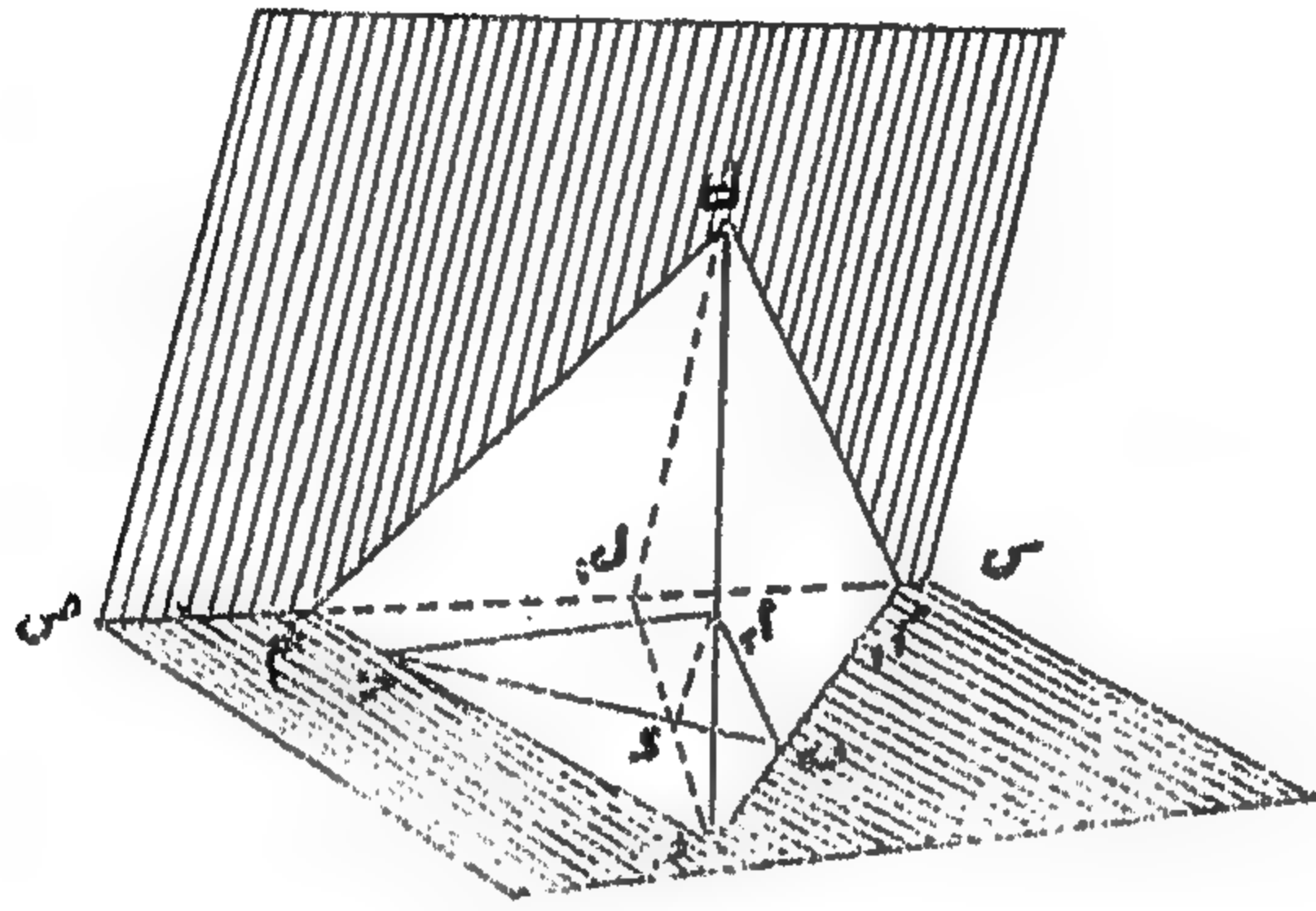
مسقط المثلث المتكون من المستقيم  $ab$  وإيجاد الشكل الحقيقي له وهو  $a_1b_1c_1$   
والزاوية  $\theta$  المتضمنة للزاوية  $a_1b_1c_1$  هي الزاوية المطلوبة

مسألة ٤٣ تعيين الزاوية الزوجية بين مستويين منقاطعين

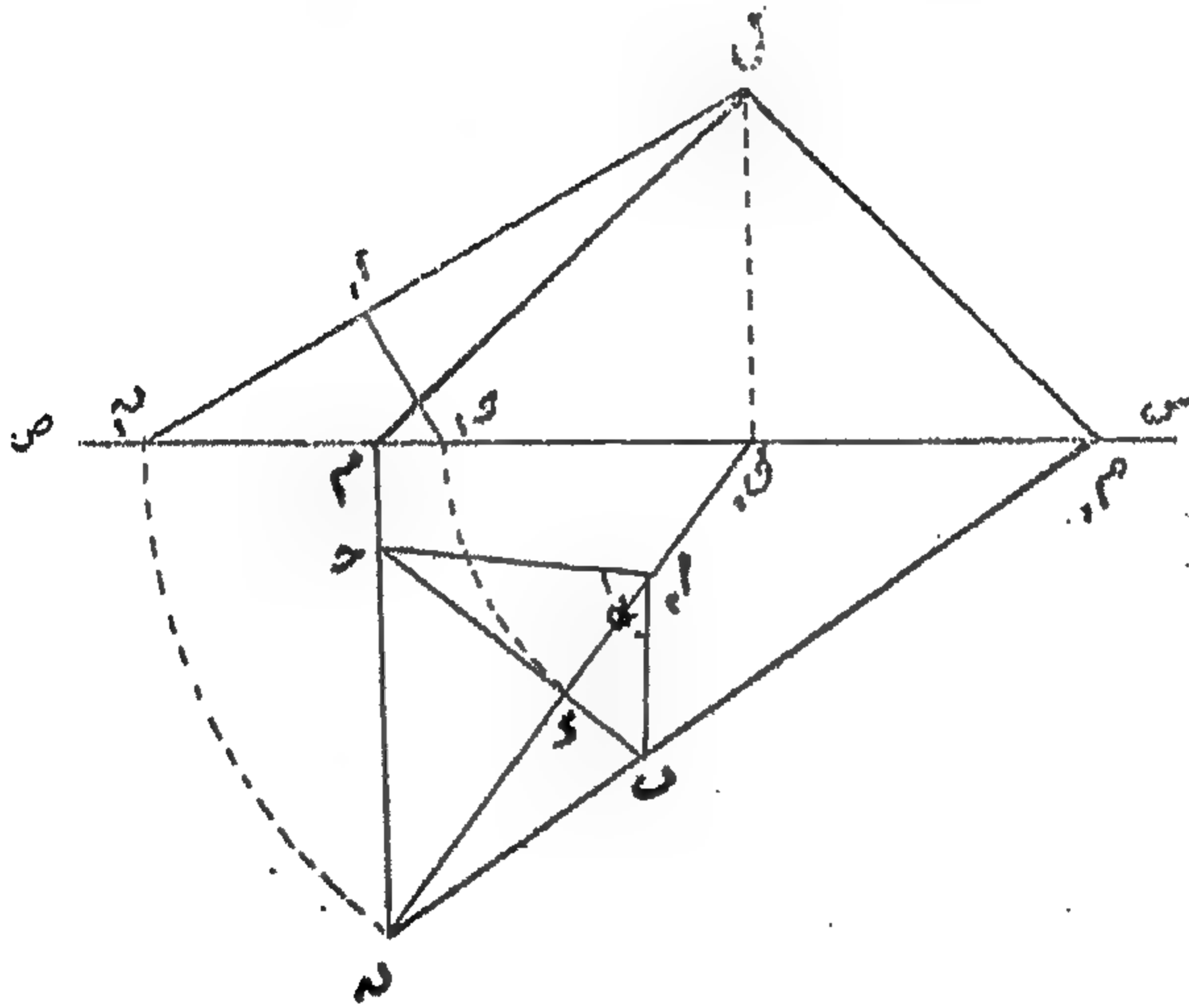
المفروضه — المستويين المتقاطعين  $\pi_1$  و  $\pi_2$  و  $\pi_3$  شكلي ١٨٥ و ١٨٦

والمطلوب : إيجاد الزاوية الزوجية بينهما

العمل : — نرسم  $\pi_1$  وهو المسقط الافقى لخط التقاطع  $\pi_1 \cap \pi_2$  ثم من أى نقطة



شكل ١٨٥



شكل ١٨٦

مثل  $\pi_3$  على  $\pi_1$  نرسم الخط  $\pi_3 \cap \pi_1$  وبقابل  $\pi_2$  في  $\pi_1$  ونرسم العمودى من  $\pi_3$  على الخط  $\pi_3 \cap \pi_1$  وذلك بدوران المثلث  $\pi_3 \cap \pi_1$  حتى ينطبق على المستوى الرأسى فتنتقل  $\pi_3$  الى  $\pi_1$  الى  $\pi_2$  فنقيم من  $\pi_3$  عمودا على  $\pi_1$

وايكن  $د ا$  شكل ١٨٦ ثم نأخذ الطول  $د ا$  على الخط  $د ن$  وليكن  $د ا$  ونصل  
 $د ا$  و  $د ا$  تكون الزاوية  $د ا ه$  هي الزاوية المطلوبة

البرهان — المستوى  $د ن$  عمودي على الافقى ويقطعه في  $د$  فبما أن  
 $د$  عمود على  $د ه$  فيكون عمودا على المستوى  $د ن ه$  (نتيجة نظرية ٥) ويكون عمودا  
على الخط  $د ه$  الواقع في المستوى ولكن  $د ا$  عمود على  $د ه$  أيضا فيكون  $د ه$   
عمودا على كل من  $د و$  و  $د ا$  أي عمودا على مستويهما  $د ا ه$  وتكون الزاوية  
 $د ا ه$  هي الزاوية الزوجية المطلوبة شكل ١٨٥

ولكن المثلث  $د ا ه$  شكل ١٨٦ مرسوم مساو المثلث  $د ا ه$  شكل ١٨٥  
. الزاوية  $د ا ه$  هي الزاوية بين المستويين وهو المطلوب

مسألة ٤٤ تعيين أئري مستو يميل بزاوية معلومة على مستو معلوم  
ويحتوى على خط معلوم في ذلك المستوى

المفروضه — المستوى  $د م ه$  وان  $د ن$  هو المسقط الافقى للخط  
المفروض شكل ١٨٦

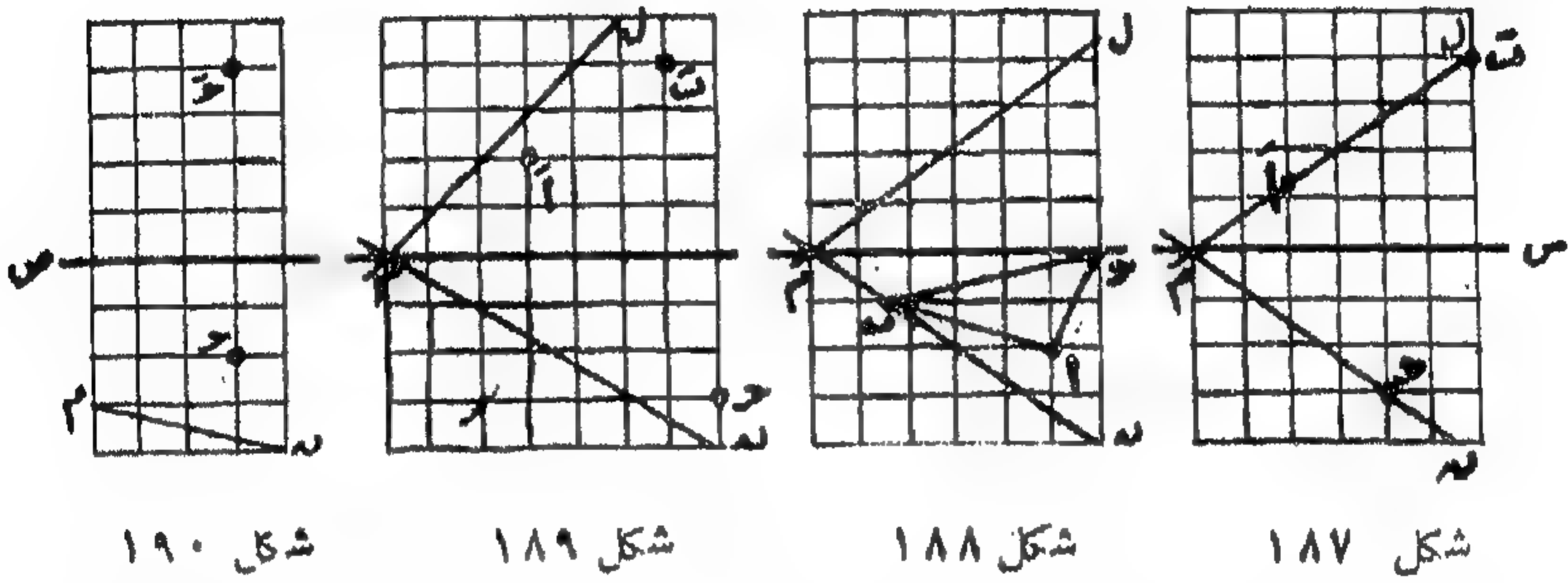
والمطلوب رسم مستو يحتوى على  $د ن$  ويميل بزاوية  $ا$  مع المستوى  $د م ه$   
العمل : — نرسم من اى نقطة  $ب$  على  $د ن$  الاثر الافقى للمستوى الخط  
 $ب ه$  عمودا على  $د ن$  ليقابله في  $د$  وننصف قطر يساوى  $د ن$  ونركز في  $د$  ونرسم  
قوسا  $د ن$  يقطع خط الارض في  $د$  وننصف قطر يساوى  $د ن$  نرسم قوسا مركزه  
 $د$  أيضا يقطع خط الأرض في  $د$  ثم نرسم من  $د$  عمودا  $د ا$  على  $د ن$  ويقطعه في  
 $ا$  ثم نأخذ البعد  $د ا$  على الخط  $د ن$  يساوى  $د ا$  ثم نصل  $د ب$  ونرسم  $ا ه$  يميل  
بالزاوية  $ا$  مع الخط  $ا ب$  فيقابل الخط  $ب ه$  في نقطة  $ه$  ثم نصل  $د ه$  ونمده ليقابل  
خط الارض في  $م$  ثم نصل  $د م$  فيكون  $د م ه$  هو المستوى المطلوب

البرهان — اذا فهم الطالب حل المسألة السابقة فلا يجد صعوبة في فهم هذه  
العملية لأنها عكس العملية السابقة تماما ورسمها يحقق تلك العملية ويلاحظ أيضا  $د ن$   
هو المسقط الافقى لخط تقاطع المستويين فيكون واقعا في كل منهما كما هو مطلوب



## تمرينات (٦) على الخط المستقيم والمستوى

(١) معلوم أثرا المستوى  $ل م ن$  شكل ١٨٧ ومعلوم أيضا مسقط واحد لكل من النقط الثلاث  $ا ب ج$  المحتوى عليها ذلك المستوى والمطلوب إيجاد الشكل الحقيقي للمثلث  $ا ب ج$



(٢) معلوم أثرا  $ل م ن$  شكل ١٨٨ ومعلوم المسقط الافقى لمثلث  $ا ب ج$  موجود في ذلك المستوى والمطلوب إيجاد المسقط الرأسى لهذا المثلث

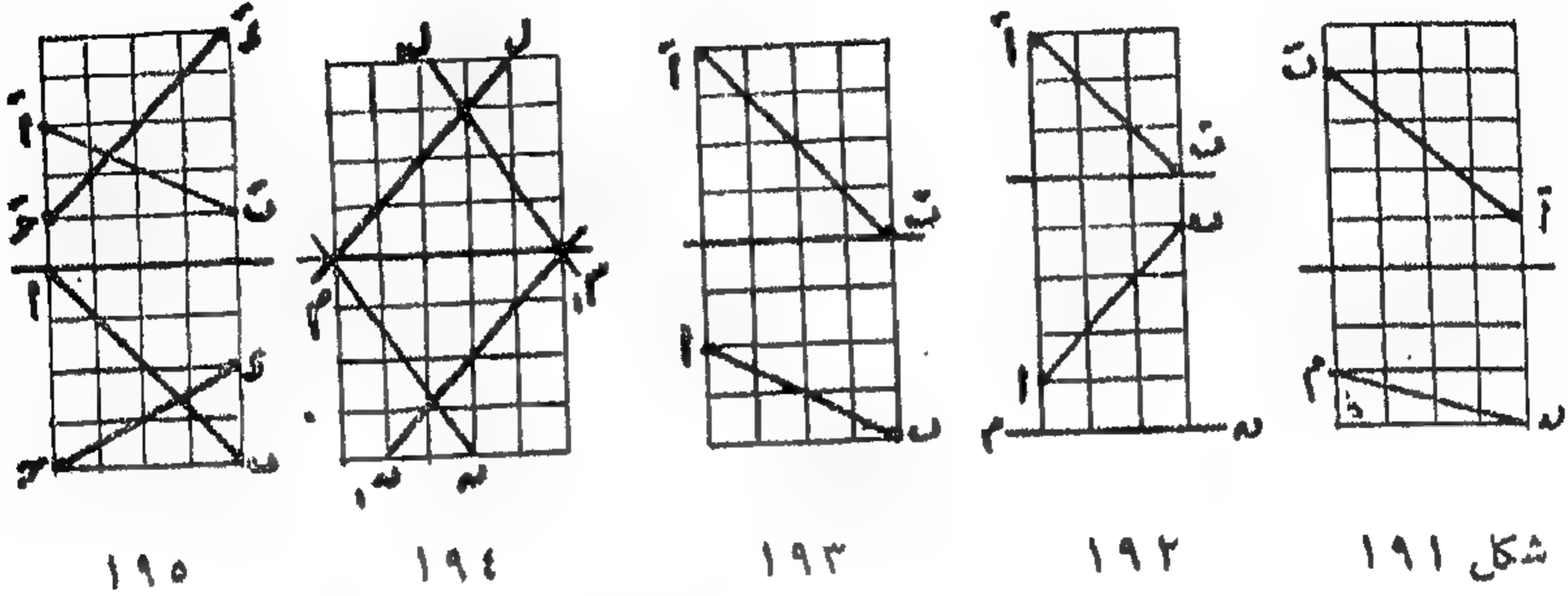
(٣) معلوم أثرا المستوى  $ل م ن$  الشكل السابق ١٨٨ والمطلوب تعيين مسقطى نقطة عليه وتبعد بمقدار ٣ سم عن كل من مستويي المسقط ثم المطلوب بعد ذلك رسم خط مستقيم أفقى في ذلك المستوى يمر بالنقطة المذكورة

(٤) معلوم أثرا المستوى  $ل م ن$  شكل ١٨٩ وأب  $ا ب$  هما المسقطان الرأسيان لنقطتين منه وأن  $ح$  هي المسقط الافقى لنقطة ثالثة عليه وأيضا وليست على استقامة النقطتين  $ا ب$  والمطلوب إيجاد المسقط الرأسى والافقى للمثلث المتكون من الثلاث نقط وإيجاد شكله الحقيقي

(٥) معلوم الاثر الافقى  $م ن$  لمستو شكل ١٩٠ ومسقطا نقطة على هذا المستوى مثل  $ح$  والمطلوب رسم الاثر الرأسى لذلك المستوى وإيجاد مسقطى نقطة أخرى مثل  $د$  عليه أيضا تبعد عن النقطة  $ح$  بمقدار ٥ سم ( يفرض أن الاثر الافقى هذا لا يمكن تقابله مع خط الارض في حدود ورقة الرسم )

(٦) معلوم الاثر الافقى  $م ن$  لمستو شكل ١٩١ والمسقط الرأسى  $آ ك$  للمستقيم

أ ب واقع في ذلك المستوى والمطلوب رسم المسقط الافقى للمستقيم أ ب اذا كان طوله الحقيقي ٧ سم ( بفرض أن الاثر الافقى هذا لا يمكن تقابله مع خط الارض في حدود ورقة الرسم )



( ٧ ) أ ب هما المسقطان الرأسى والافقى للخط المستقيم أ ب على التوالي ومعلوم الاثر الافقى م ن لمستوا شكل ١٩٢ فاذا كان الخط أ ب يقابل ذلك المستوى في نقطة تبعد عن النقطة ب بمقدار ٣٫٧٥ سم فالمطلوب تعيين الاثر الرأسى لهذا المستوي

( ٨ ) المطلوب تعيين أثرى كل من المستويين المتقاطعين المحتويين على الخط أ ب المرسوم مستطاه في شكل ١٩٣ اذا كان ميل كل من هذين المستويين على المستوى الافقى هو ٦٠° ( بفرض أنه لا يمكن امتداد المسقطين المذكورين يميناً أو شمالاً )

( ٩ ) الاثر الافقى لمستوى عمودى يميل مع خط الأرض بزاوية قدرها ٤٥° والمطلوب رسم المسقطين الرأسين لخطين واقعين في ذلك المستوى ويميل أحدهما بزاوية ٣٠° مع المستوى الرأسى ويميل الآخر بزاوية ٦٠° مع المستوى الافقى وأن الخط الأول يقابل خط الارض وأن الثانى يقطع الأول في نقطة تبعد عن المستوى الرأسى بمقدار ٣٫٧٥ سم

( ١٠ ) يميل كل من الاثر الرأسى والافقى لمستوى بزاوية ٦٠° و ٤٥° مع خط الارض على التوالي والمطلوب رسم مسقطى خط مستقيم واقع في ذلك المستوى ويميل ٣٠° مع المستوى الافقى ويمر بنقطة تبعد بمقدار ٢٫٥ سم عن كل من مستويي المسقط

(١١) المعلوم أثر المستوى شكل ١٨٩ والمطلوب رسم مستقيم واقع في ذلك المستوى ويميل بزاوية  $30^\circ$  مع المستوى الافقى بشرط أن يكون طول الجزء الواقع منه بين أثرى ذلك المستوى هو ٧ سم

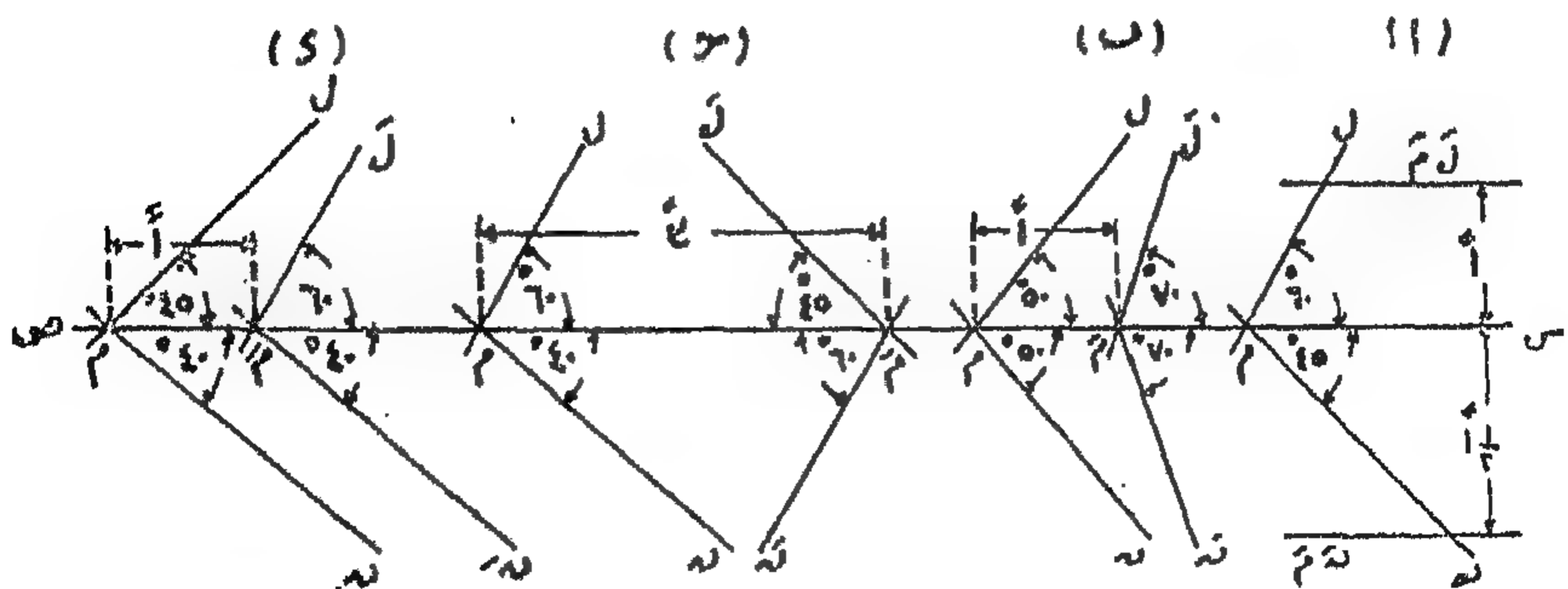
(١٢) المعلوم أثر المستوى ل م ن شكل ١٩٤ والمطلوب رسم مسقطى خط مستقيم واقع في ذلك المستوى ويوازي المستوى ل م ن ويبعد عنه بمقدار ١ سم

(١٣) المطلوب رسم مسقطى الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة آ فى الشكل ١٩٤ ويوازي كل من المستويين ل م ن و ل م ن (النقطة أ هي ٢ و ٣ وعلى خط عمودى على خط الارض من م)

(١٤) يميل كل من الاثر الرأسى والافقى مستوى بزاوية  $60^\circ$  و  $45^\circ$  مع خط الارض على التوالى والمطلوب رسم مسقطى الخط المستقيم العمودى على هذا المستوى ويقابله في نقطة مثل أ ويقابل خط الارض في نقطة ب بحيث يكون طول الخط أ ب هو ٣ سم

(١٥) أ ب و ا ب و ح و د هي مساقط خطين مستقيمين ا ب و ح و د ليسا متقاطعين شكل ١٩٥ والمطلوب تعيين أثرى المستوى الذى يحتوى على ح و د ويوازي ا ب ثم أوجد أيضا مسقطى الخط ا ب على هذا المستوى

(١٦) المطلوب رسم أثرى المستوى العمودى على المستقيم ا ب وينصفه شكل ١٩٢



شكل ١٩٦

(١٧) المطلوب رسم أثرى المستوى الذى يحتوى على النقطة ١١ شكل ١٩٤ وعمودى على كل من المستويين المعلومين (النقطة) ١ هى ٢ و ٣ وعلى خط عمودى على خط الارض من م )

(١٨) الزاوية بين خطين مستقيمين متقاطعين هى  $60^\circ$  ويميل أحدهما بزاوية  $35^\circ$  ويميل الآخر بزاوية  $45^\circ$  مع المستوى الاقصى والمطلوب تعيين ميل المستوى المحتوى عليهما على كل من مستويي المسقط

(١٩) المطلوب إيجاد الزاوية المحصورة بين المستويين فى الاشكال ١٩٥ و ١٩٦ شكل ١٩٦

(٢٠) المطلوب رسم اثرى مستو يميل بزاوية  $30^\circ$  مع المستوى ل م ن شكل ١٨٨



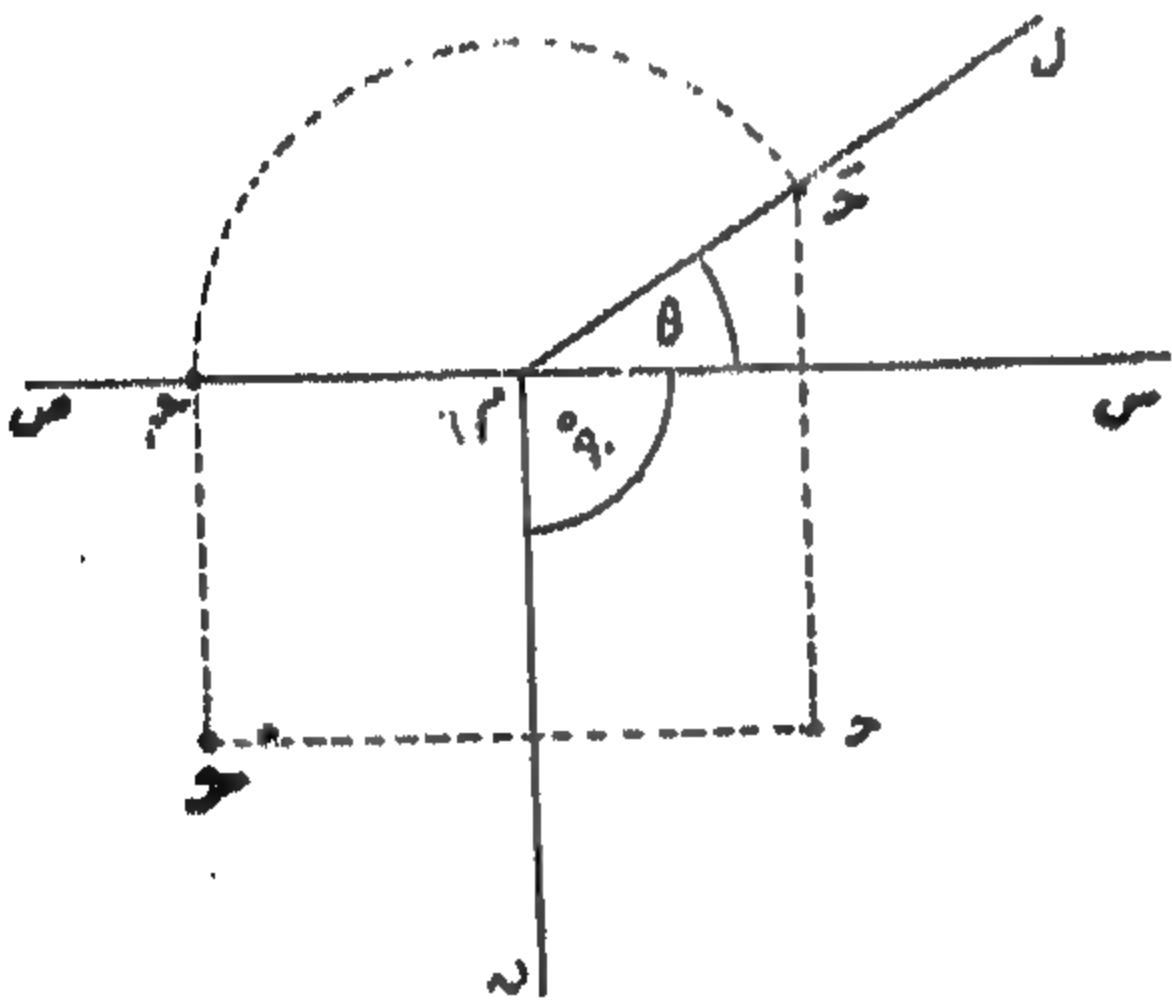
## الفصل الثامن

٢٩ - دوران المستويات حول أمر أثريها وانطباقها على أمر مستوي المسقط

المعلوم ميل أى مستو على كل من مستويي المسقط والمطلوب تعيين أثرى هذا المستوي ودورانه حول أحد أثريه الى أن ينطبق على أحد مستويي المسقط

أولاً - دوران مستوى عمودى على أمر مستوي المسقط

(١) - المفروضه : مستوى يميل على المستوى الافقى بزاوية  $\theta$  وعمودى



شكل ١٩٧

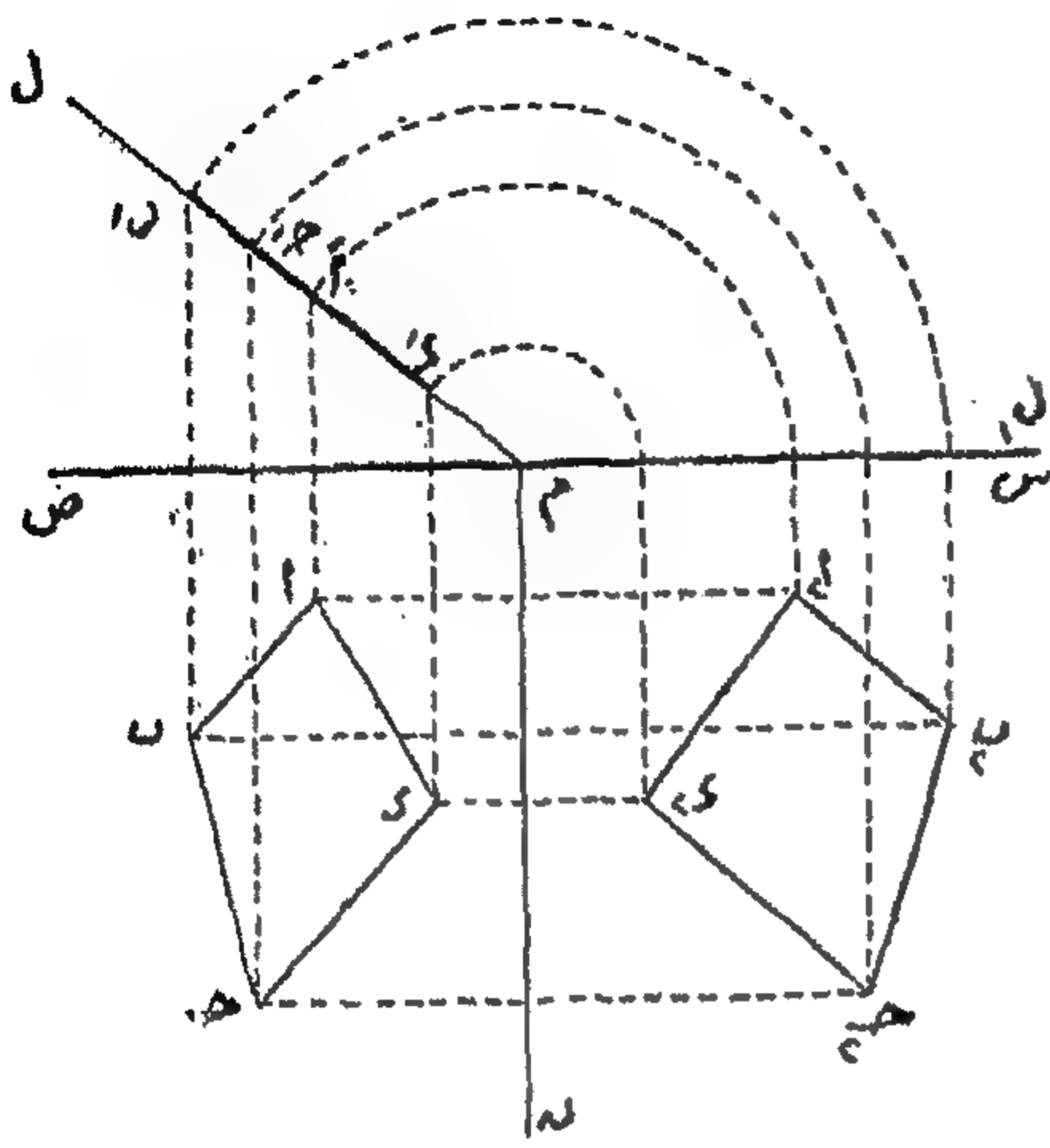
على المستوى الرأسى شكل ١٩٧  
والمطلوب رسم أثرى هذا المستوى  
ودورانه الى أن ينطبق على المستوى الافقى  
العمل - معلوم أن الاثر الرأسى  
لهذا المستوى يميل بالزاوية  $\theta$  مع خط  
الأرض وأن الاثر الأفقى لهذا المستوى

عمود على المستوى الرأسى فهو عمود على كل خط فيه ولذا فهو عمود على الاثر  
الرأسى لنفس المستوى شكل ١٩٧ أى أن الزاوية الحقيقية بين أثرى ميل  
هذا المستوى هى زاوية قائمة وتظل تلك الزاوية قائمة قبل الدوران وبعده . فلا بد  
إذاً أن ينطبق الاثر الرأسى لهذا المستوى على خط الأرض بعد الدوران . وإذا  
انتخبنا أى نقطة على الاثر الرأسى مثل  $هـ$  . فإن المسافة من تلك النقطة الى نقطة  
تلاقي الاثرين تظل ثابتة أثناء الدوران الى أن ينطبق المستوى على المستوى الافقى  
والآن اذا ركزنا فى نقطة تلاقي الاثرين  $م$  وبعده يساوى  $م هـ$  ورسمنا قوسا الى

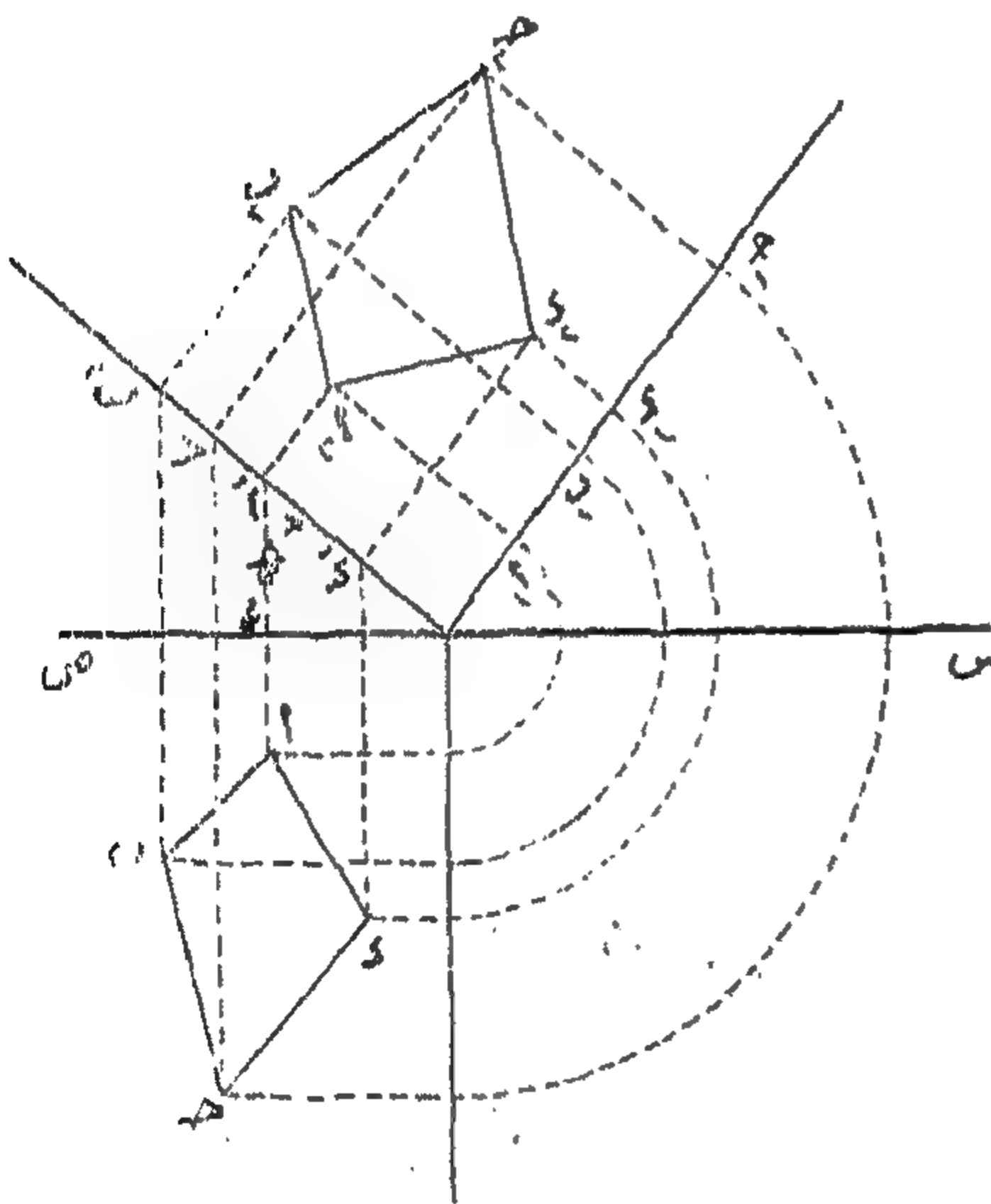








(شکل ۲۰۱)



۲۰۲ (شکل)

المستقيم اب بعد الانطباق وهو  
بعد حقيقي

ثانيا - يمكن إيجاد الشكل الحقيقي ووضع أي مضلع كان مثل المضلع  $ABCDEF$  الموجود في مستوى عمودي ومعلوم مسقطاه بعد انطباق مستوييه هذا على أحد مستويي المسقط وذلك بإيجاد موضع رؤوسه بعد انطباق المستوى على أحد مستويي المسقط كما سبق في إيجاد وضع النقطة والخط المستقيم. فالمضلع المتكون من تلك الرؤوس وهي منطبقة يكون وضع المضلع المطلوب وهو الشكل الحقيقي لهذا المضلع وفي شكل ٢٠١

المضلع  $ABCD$  يبين وضع المضلع  $S$   
 وشكله الحقيقي بعد انطابقه على  
 المستوى الافقى وفي شكل ٢٠٢  
 المضلع  $ABCD$  يبين وضعه  
 وشكله الحقيقي وهو منطبقا على  
 المستوى الرأسي

ثالثاً - يمكن إيجاد الشكل الحقيقي لدائرة أو أي منحنى موجود في مستوى عمودي معلوم بمعلومية مسقطيه وذلك بإيجاد وضع عدة نقاط على هذا المنحنى بعد انطباق مستوية على أحد مستويي المسقط فالمنحنى المتكون من تلك النقاط بعد الانطباق تكون الشكل الحقيقي للمنحنى المذكور وشكل ٢٠٣ يبين الشكل الحقيقي للدائرة



مسألة ٤٦ — المعلوم أن رأياً مستوياً وعمودى ومعلوم وضع نقطة منه بعد انطباقه على أحد مستويي المسقط والمطلوب تعيين مسقطي تلك النقطة قبل دورانه ذلك المستوى وانطباقه

المفروضه : — المستوى  $ل م ن$  المائل بالزاوية  $\theta$  مع المستوى الأفقى وعمودى على المستوى الرأسى وأن  $ص$  هو موضع نقطة منه مثل  $ح$  بعد انطباقه على أحد مستويي المسقط وليكن المستوى الأفقى شكل ١٩٧ والمطلوب : — إيجاد مسقطي النقطة  $ح$  قبل دوران المستوى

العمل : — نزل العمود من  $ص$  على خط الأرض ليقابله  $ص$  وهى المسقط الرأسى للنقطة  $ح$  بعد الانطباق ثم نركز فى  $م$  ونصف قطرم  $ص$  ونرسم قوساً يقطع الأثر الرأسى للمستوى  $ل م ن$  فى  $م$  تكون هى المسقط الرأسى للنقطة  $ح$  قبل الدوران ثم نرسم من  $ص$  خطاً موازياً لخط الأرض ليقابل الخط النازل من  $م$  عموداً على خط الأرض فى  $م$  تكون  $م$  المسقط الأفقى للنقطة المذكورة وهو المطلوب ملاحظة : — هذه العملية هى عكس العملية فى المسألة ٤٥ ويمكن فهم تلك العملية فى حالة انطباق المستوى على المستوى الرأسى شكل (١٩٨) نتيجة : —

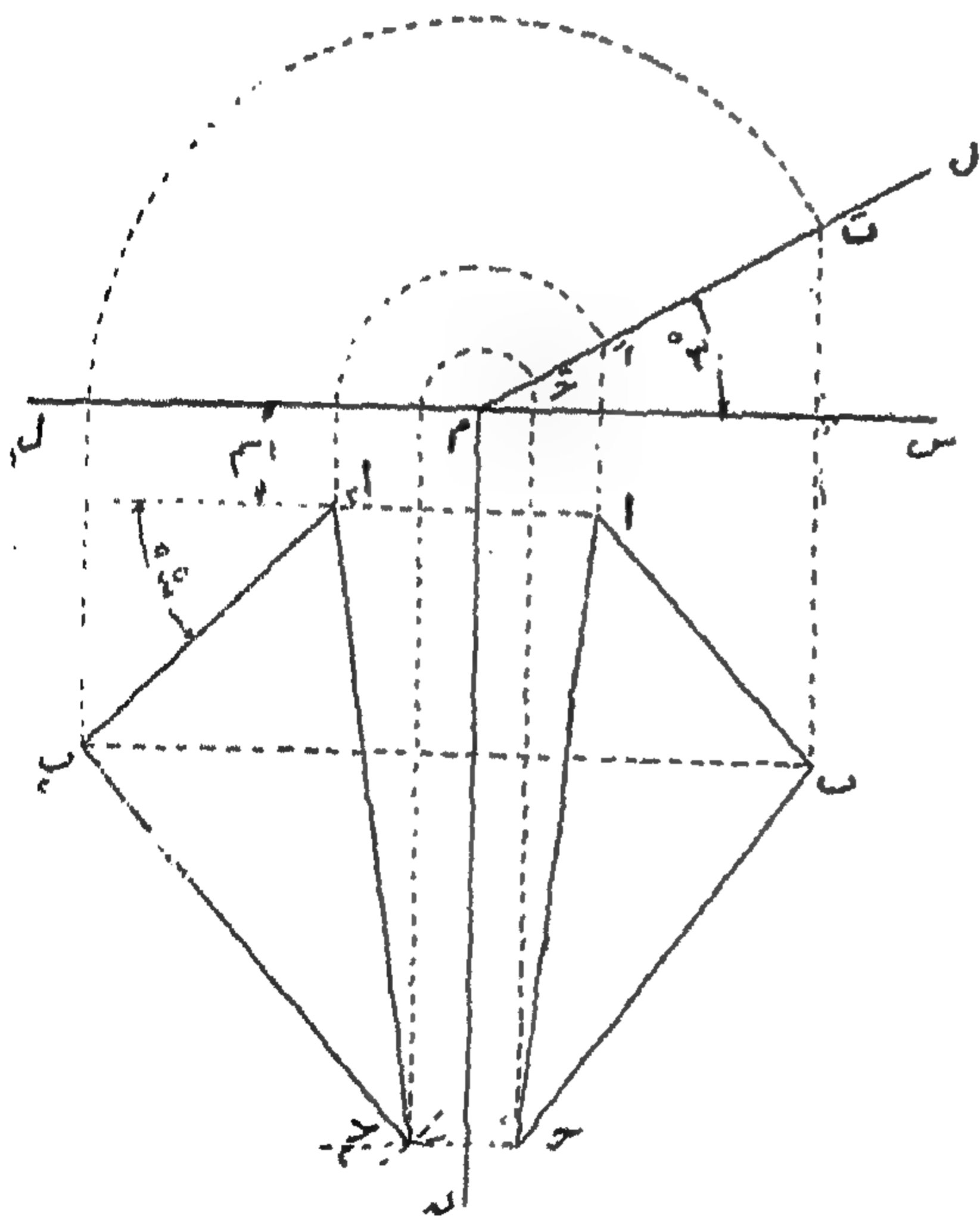
أولاً — يمكن إيجاد مسقطى أى مضلع كان مثل  $أ ب ح د$  موجود فى مستوى عمودى إذا علم وضع ذلك المضلع بعد انطباق مستوييه على أحد مستويي المسقط أو بمعنى آخر إذا علم شكله الحقيقى وهذا عكس ما ذكر فى النتيجة الثانية مسألة (٤٥) وشكل (٢٠١) و (٢٠٢) يوضحان طريقة العمل

ثانياً — يمكن أيضاً إيجاد مسقطى أى دائرة أو أى منحنى معلوم وضعه وشكله الحقيقى قبل الانطباق بنفس الطريقة وهو عكس ما ذكر فى النتيجة الثالثة من مسألة (٤٥) وشكل (٢٠٣) و (٢٠٤) موضح بهما طريقة العمل

مسألة ٤٧ — المعلوم المثلث  $أ ب ح$  الذى يميل بالزاوية  $\theta$  مع المستوى



الافقى وعمودى وعلى الرأسى ومعلوم ابعاد كل من أضلاعه  $أ ب$  و  $ب ح$   
 ح  $ا$  والمطلوب رسم مسقطى ذلك المثلث عشر ما يميل أهدر أضلاعه  $أ ب$  على المستوى  
 الرأسى بالزاوية  $٣٠^\circ$  وبحيث تبعد النقطة  $ا$  عن المستوى الرأسى بمقدار معلوم ايضا  
 المفروضه — المثلث  $أ ب ح$  الذى يميل بالزاوية  $٣٠^\circ$  مع المستوي الافقى  
 $ب ا = ٤ سم$  و  $ب ح = ٥ سم$  و  $ح ا = ١ سم$  بحيث يميل ضلعه  $أ ب$   
 بالزاوية  $٤٥^\circ$  مع المستوى الرأسى وتبعد النقطة  $ا$  منه بمقدار  $١ سم$  عن المستوى الرأسى  
 والمطلوب : — رسم مسقطى ذلك المستوى على كل من مستويي المسقط



شكل (٢٠٥)

العمل : — نرسم  
 أثرى المستوى  $س م$  بحيث  
 يميل أثره الرأسى  $س م$  بزاوية  
 $٣٠^\circ$  وأثره الافقى  $م ن$   
 عمودى على خط الارض .  
 ثم نرسم خطا مستقيما موازيا  
 لخط الارض ويبعد عنه  
 بمقدار  $١ سم$  وهو بعد  
 النقطة  $ا$  عن المستوى الرأسى  
 وتنتخب عليه نقطة مثل  $ا م$   
 تكون  $ا م$  وضع النقطة  $ا$

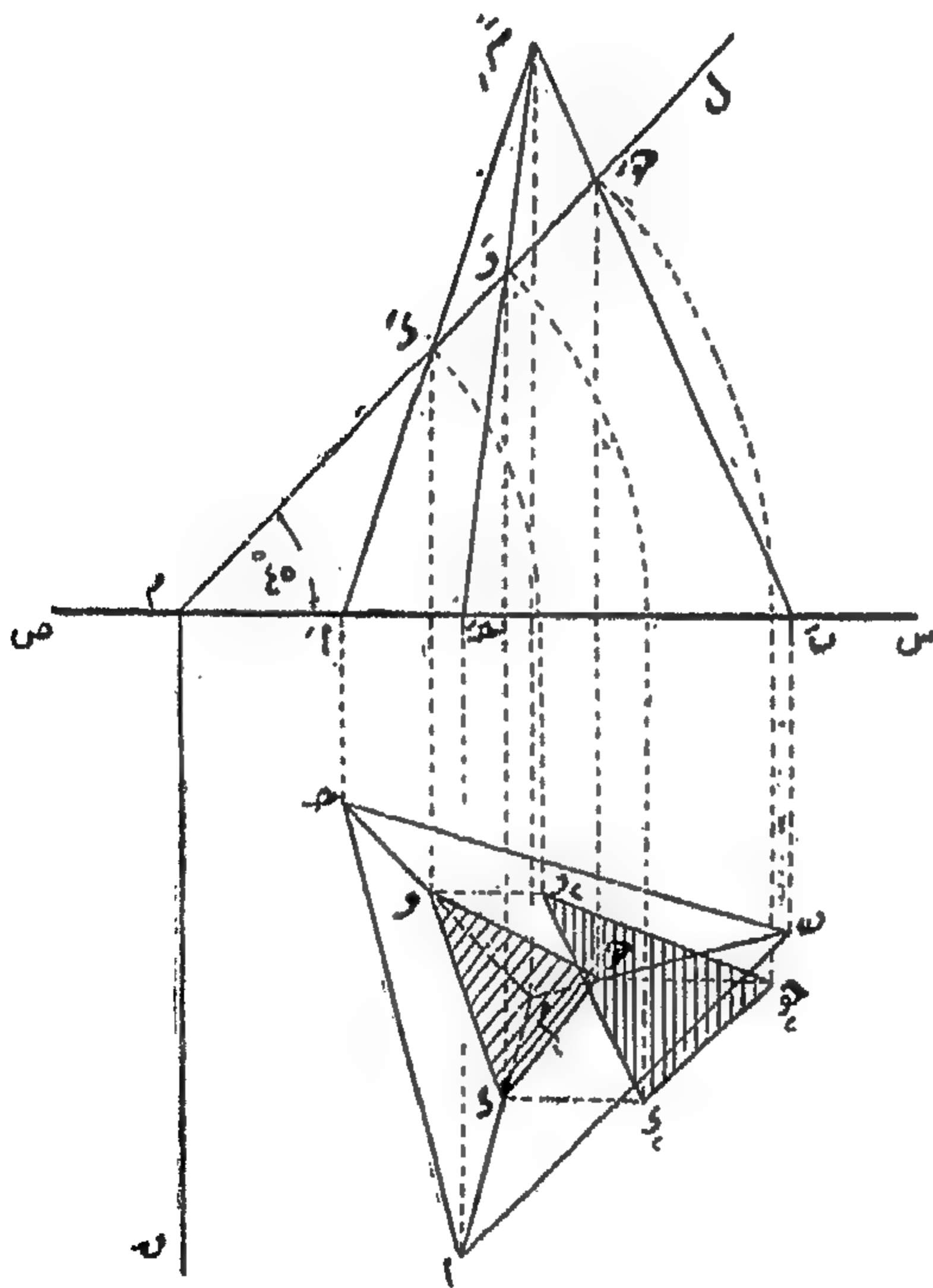
بعد الانطباق ثم نرسم  $ا ب$  يميل بالزاوية  $٤٥^\circ$  مع خط الارض وتأخذ عليه البعد  
 $ا ب$  يساوى  $٤ سم$  فتكون  $ب$  وضع النقطة  $ب$  بعد الانطباق ثم نركز فى  $ا م$   
 ويبعد يساوى  $٥ سم$  ونرسم قوسا ثم نركز فى  $ب$  ويبعد يساوى  $٥ سم$  ونرسم  
 قوسا يقطع القوس الاول فى  $ح$  تكون  $ح$  وضع النقطة  $ح$  بعد الانطباق . بعد  
 ذلك تتحول المسألة إلى كيفية إرجاع النقط الثلاث  $ا ب ح$  و  $ا م$  إلى وضعها

قبل الدوران وهذا كما بالمسألة ٤٦ بإيجاد مسقطي كل نقطة على حده ينتج مسقطي المثلث  $آ ب ج$  وهو المطلوب شكل ٢٠٥

نتيجة : —

يمكن إذا رسم أى شكل مستو معلوم إبعاده بأى شرط كان بواسطة طريقة انطباق المستويات وهذا من الصعب رسمه بغير تلك الطريقة وسيأتى الكلام على أحوال أصعب من هذه فى الباب التالى

مسألة ٤٨ — تعيين الشكل الحقيقى لقطاع فى جسم مقطوع بمستوى عمودى بطريقة دورانه المستوى القاطع وانطباقه على أحد مستويي المسقط بعد تعيين مسقطي ذلك القطاع



شكل (٢٠٦)

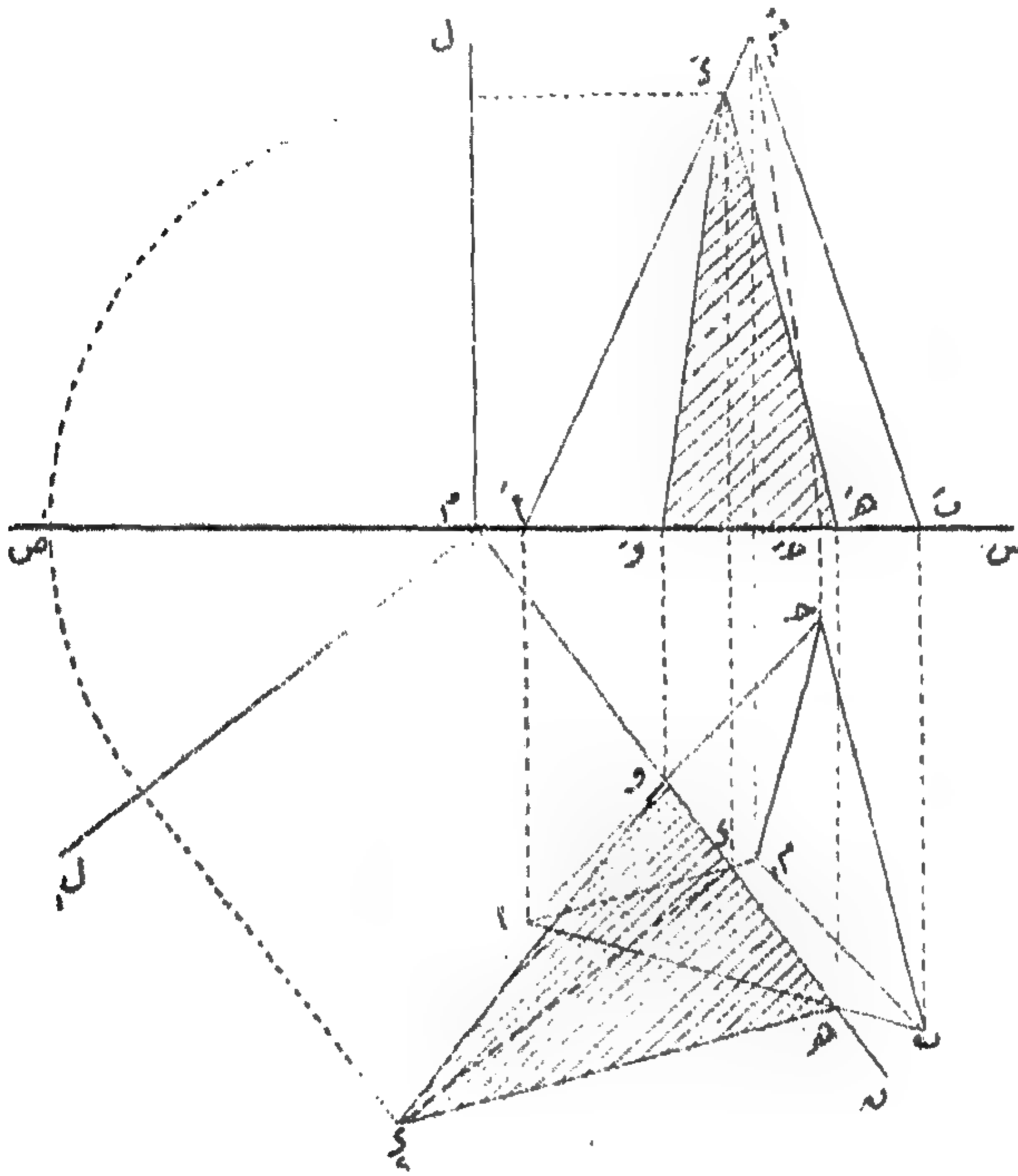
(١) المفروضه الهرم  
الثلاثى  $آ ب ج$  المقطوع  
بالمستوى  $ل م ن$  الذى يميل  
بزاوية  $٤٥^\circ$  مع المستوى  
الافقى وعمودى على الرأسى  
والمطلوب تعيين  
مسقطي القطاع وإيجاد  
الشكل الحقيقى للقطاع  
شكل (٢٠٦)

العمل — الاثر

الرأسى  $ل م ن$  للمستوى  
القاطع يقطع المساقط الرأسية  
لاحرف اوجه الهرم  $آ ب ج$

$آ ب ج$  فى النقط الثلاث  $د ه و$  على التوالي والمساقط الافقية لاحرف الواجه

نفسها وهي د ه و على التوالي . صار اذا من المعوم المسقطان الرأسى والافقى للقطاع وبذا قد تحولت المسألة الى ايجاد الشكل الحقيقى للشكل المستوى المبين مسقطاه الرأسى والافقى فى د ه و و د ه و على التوالي الموجود فى المستوى العمودى لـ م نـ فيجري العمل بطريقة الانطباق كما فى مسألة ٤٥ ومن الشكل (٢٠٦) يتضح ان الشكل الحقيقى هو د م ه م وهو المطلوب



شكل (٢٠٧)

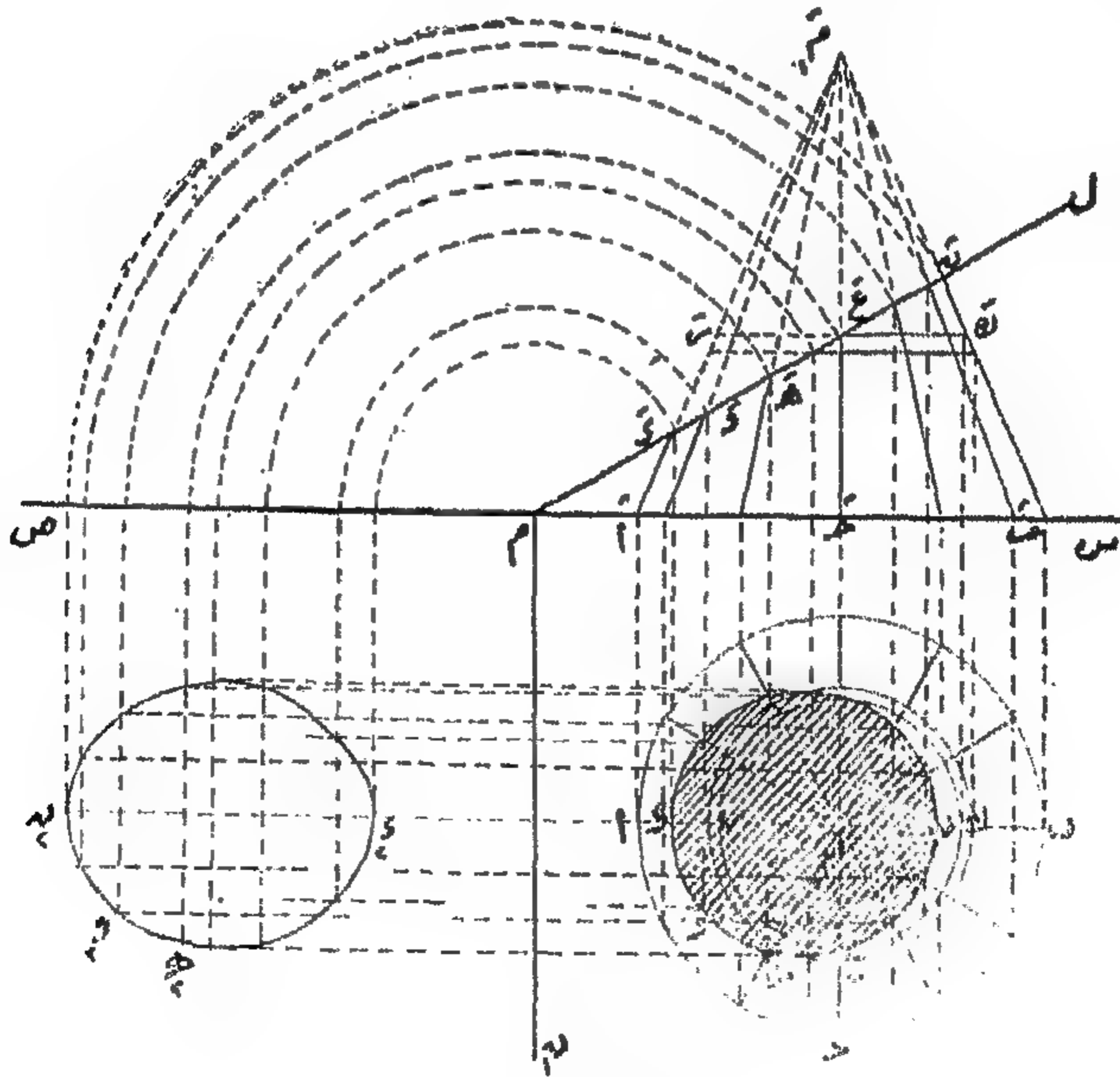
(ب) المفروض : الهرم الثلاثى م م ا بـ المقطوع بالمستوى لـ م نـ الذى يميل بزاوية ٤٥° على المستوى الرأسى وعمودى على المستوى الافقى والمطلوب : ايجاد الشكل الحقيقى للقطاع شكل (٢٠٧)

العمل : الاثر الافقى للمستوى القاطع قطع المسقط الافقى لحرف الهرم م ا فى د و قطع ايضا المسقطين الافقيين لحرفى القاعدة ا ب فى ه و فى د ه و على التوالي والنقط الثلاث د ه و تكون مسقطا افقيا لمثلث هو شكل القطاع مسقطه الرأسى

واقع على المسقط الرأسى للحرف م ١ وعلى المسقطين الرأسين لحرفى القاعدة آ ب  
و آ ح عند النقط د ه و ف و على التوالى . وهذا القطاع المثلثى واقع فى المستوى القاطع  
طبعاً وهو المستوى العمودى على الرأسى م ن ه فبدوران ذلك المستوى حول اثره  
الافقى م ن ه ومعه القطاع حتى ينطبق على المستوى الافقى ينتج الشكل الحقيقى للقطاع  
م ه و شكل ( ٢٠٧ ) وهو المطلوب

مسألة ٤٩ : تعيين الشكل الحقيقى لقطاع فى مخروط مقطوع بمستوى  
عمودى بطريقة دورانه المستوى القاطع وانطباقه على أمر مستوي المسقط  
بمعز تعيين مسقطى القطاع المذكور

( ١ ) المفروض : المخروط م ا ب ه المقطوع بمستوى م ن ه عمودى على الافقى  
ومائل على الرأسى ويقطع جميع روااسم المخروط وليس عمودياً على محور ذلك  
المخروط شكل ( ٢٠٨ ) والمطلوب تعيين مسقطى القطاع وايجاد الشكل الحقيقى  
العمل : المسقط الرأسى لقطاع المخروط واقع على الاثر الرأسى للمستوى القاطع



شكل ( ٢٠٨ )

بين  $\delta$  و  $\epsilon$  وواقع أيضا على جميع رواسم المخروط عند نقط مثل  $\delta$  و  $\epsilon$  وواقع  $\delta$  و  $\epsilon$  الخ ولايجاد المسقط الافقى للقطاع نعين أولا مساقط رأسية وافقية لجملة رواسم المخروط ويستحسن تقسيم محيط القاعدة الى أقسام متساوية ويصل من الرأس لتلك الاقسام في المسقط الافقى ينتج المساقط الافقية لتلك الرواسم ثم نعين مساقطها الرأسية باسقاط نقط التقسيم على المسقط الرأسى للقاعدة وتوصيلها بالرأس في المسقط الرأسى بعد ذلك نرى أن المستوى القاطع يقطع المساقط الرأسية للرواسم في نقط مثل  $\delta$  و  $\epsilon$  وواقع  $\delta$  و  $\epsilon$  الخ نأت بمساقطها الافقية وهى واقعة على المساقط الافقية لتلك الرواسم عند النقط  $\delta$  و  $\epsilon$  وواقع  $\delta$  و  $\epsilon$  الخ التى تكون شكل المسقط الافقى للقطاع

يمكن بهذه الطريقة ايجاد المساقط الافقية لجميع النقط فقط لايمكن بها ايجاد المسقط الافقى للنقطة  $\epsilon$  الواقعة على راسم رأسى ولهذا نقطع المخروط بمستوى افقى مثل المستوى  $\delta$  الذى يكون مسقطه الافقى دائرة نصف قطرها  $\epsilon$  وتكون  $\epsilon$  نقطة على محيط تلك الدائرة فاذا ركزنا فى نقطة  $\delta$  المسقط الافقى لرأس المخروط ورسمنا دائرة نصف قطرها يساوى  $\epsilon$  تقطع المسقط الافقى للراسم  $\delta$  فى نقطة  $\epsilon$  هى المسقط الافقى للنقطة  $\epsilon$

وبدوران المستوى القاطع ومعه القطاع وانطباقه على المستوى الافقى كما فى المسألة السابقة ينتج الشكل الحقيقى للقطاع وهو المنحنى  $\delta$  و  $\epsilon$  و  $\delta$  و  $\epsilon$

ملاحظة: هذا المنحنى يسمى بمنحنى قطع ناقص ومسقطه الافقى غالبا هو  
منحنى قطع ناقص وقد يكون مسقطه الافقى محيط دائره فى بعض الاحيان

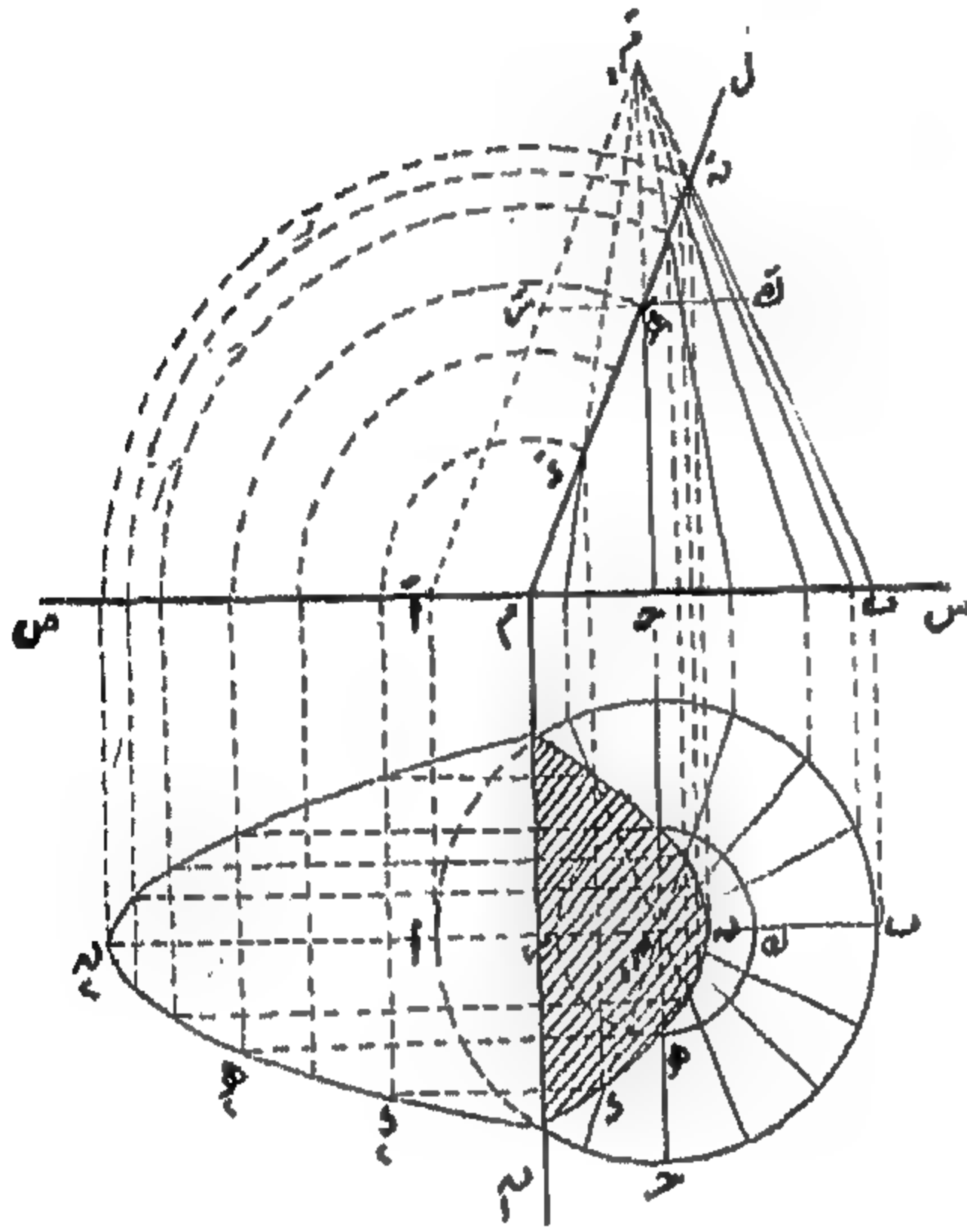
وكما قرب المستوى القاطع من الرأس صغر القطع الناقص الى ان يصل فى النهاية الى الصفر

(ب) المفروض: المخروط السابق  $\delta$  و  $\epsilon$  ح المقتوع بالمستوى العمودى على الافقى  $\delta$  و  $\epsilon$  مواز ل احد رواسم المخروط وايكن الراسم  $\delta$



والمطلوب : تعيين مسقطي القطاع وشكله الحقيقي

العمل : نجري كما سبق في الحالة ١ تماماً وذلك واضح بالشكل ( ٢٠٩ )



شكل ( ٢٠٩ )

ملاحظة : الشكل الحقيقي

لمنحنى القطاع هنا يقال له منحنى

قطع مكافئ و كذلك يسمى

منحنى مسقطه الافقى

نهاية القطع المكافئ ( اى

عندما يكون المستوى القاطع مماسا

للمخروط هو خط مستقيم

( هـ ) المفروض : المخروط

السابق م ا ب هـ المقطوع بالمستوى

العمودى على الافقى ل م ن و مواز

لرأسين من روااسمه او بمعنى آخر قاطع للسطح المخروطي في جهتين مختلفتين من

الرأس شكل ( ٢١٠ )

والمطلوب : تعيين مسقطي القطاع وشكله الحقيقي

العمل : يمكن ان نجري العمل كما سبق في الحالة ( ب ) تماماً ولكن بما ان

المستوى ل م ن يقطع الرواسم في زاوية حادة فيحسن استعمال المساقط الرأسية

والافقية لجملة دوائر مرسومة على سطح المخروط فالأثر الرأسى ل م يقطع المساقط

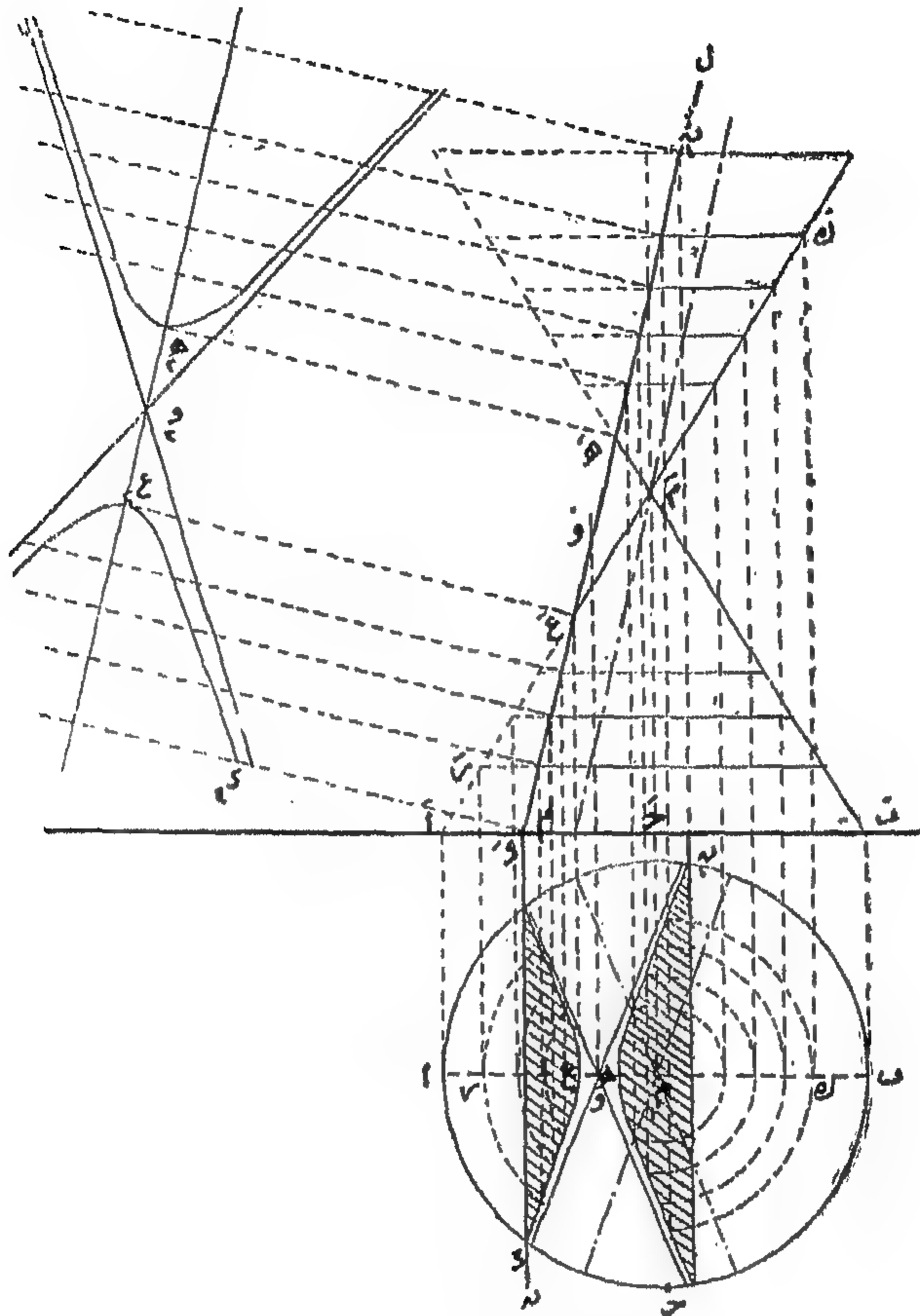
الرأسية لتلك الدوائر في نقط تكون المسقط الافقى لشكل القطاع يمكن إيجاد

مساقطها الافقية من المساقط الافقية لتلك الدوائر وواضح من الشكل كيفية العمل

وقد ادير هنا المستوى القاطع حول أثره الرأسى حتى انطبق على المستوى الرأسى

ملاحظة : يقال لشكل القطاع هنا منحنى قطع زائد ويتكون من منحنين

على ناحيتين مختلفتين من رأس المخروط



شكل ( ٢١٠ )

**ملاحظة:** نهاية القطع الزائد ( اى عندما يصل المستوى القاطع للرأس م ) هو خطين متقاطعين فى الرأس كما بالشكل ( ٢١٠ )

يتضح مما تقدم أن قطاعات المخروط بمستوى عمودى يتكون منها منحنيات يطلق عليها القطاعات المخروطية وتتلخص فيما يلى : —

أولاً — (قطاع دائرى) إذا كان المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط القائم

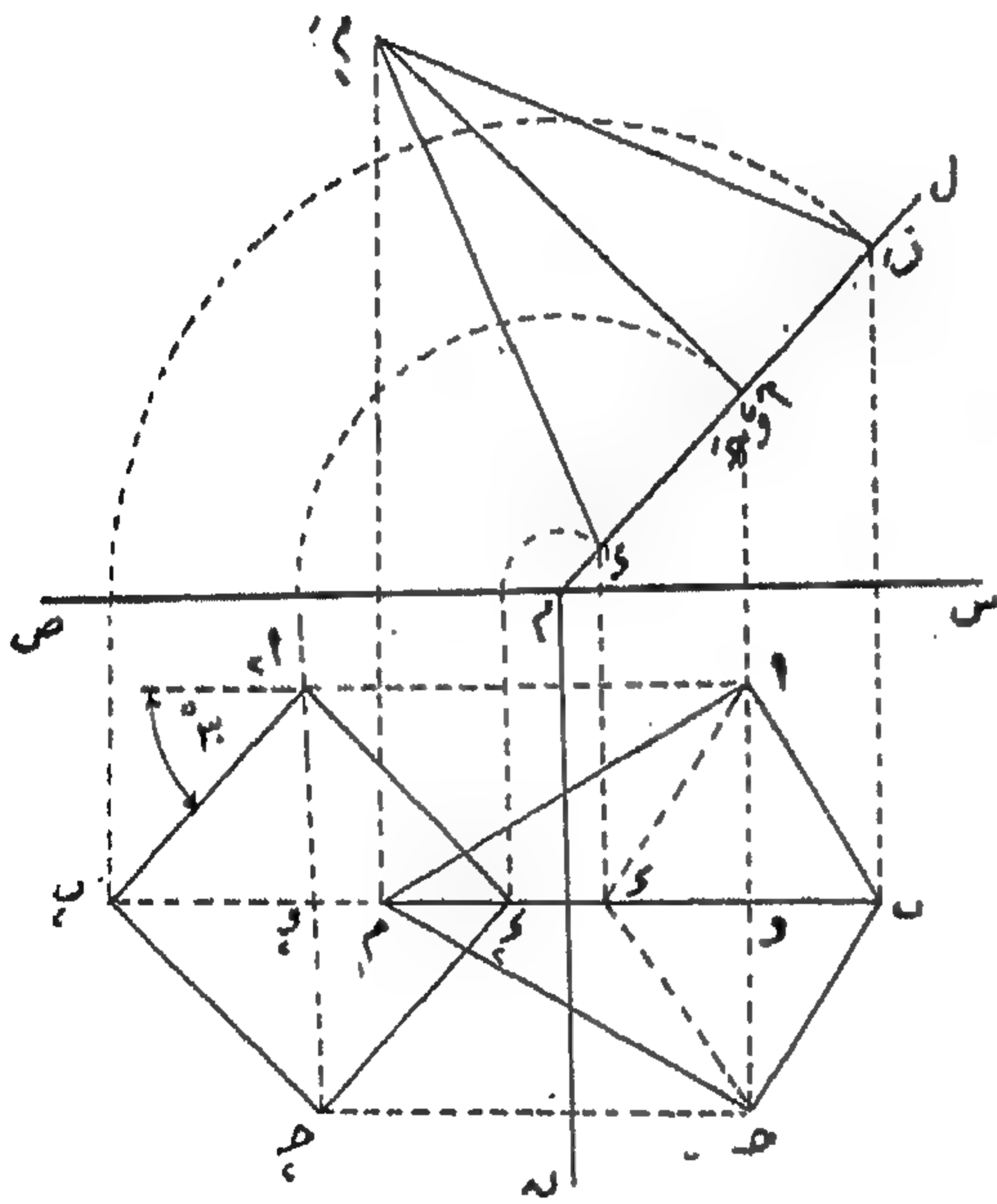
ثانياً — قطاع يطلق عليه منحنى (قطع ناقص) إذا كان المستوى القاطع يقطع جميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من الرأس ومائلاً على محوره شكل ٢٠٨

ثالثاً — قطاع يطلق عليه منحنى (قطع مكافئ) إذا كان المستوى القاطع موازياً

لاحد رواسم المخروط وهذا لا بد وأن يقطع قاعدة المخروط أيضا شكل ٢٠٩  
 رابعا — قطاع يطلق عليه منحنى (قطع زائد) إذا كان المستوى القاطع موازيا  
 لراسمين من رواسم المخروط وهذا لا بد وأن يقطع سطح المخروط وامتداده من  
 جهة الرأس في منحنين في جهتين مختلفتين من رأس المخروط شكل ٢١٠

وسيتأتى الكلام بالتفصيل على القطاعات المخروطية وخواصها الشهيرة وطرق  
 مختلفة لرسم كل منها في الجزء الثانى من الكتاب

مسألة ٥٠ — تعيين مسقطى هرم بمعلومية إبعاده وميل أحد أوجهه  
 أو قاعدته على أحد مستويي المسقط وبشروط معينة أخرى



شكل (٢١١)

المفروضة : — هرم  
 رباعى قائم م ا ب ح د  
 شكل (٢١١) طول ضلع  
 قاعدته المربعة ٣ سم وارتفاعه  
 ٤ سم

والمطلوب : — رسم  
 مسقطى الهرم المذكور  
 بحيث تميل قاعدته على  
 المستوى الافقى بزاوية ٤٥°  
 ويميل أحد أضلاع قاعدته  
 اب بزاوية ٤٥° مع المستوى

الرأسى وبحيث يبعد أحد أركان قاعدته ١ بمقدار ١ سم

العمل : نرسم أولا مستوى القاعدة وهو المستوى د م هـ شكل (٢١١) بحيث  
 يميل أثره الرأسى د م بزاوية ٤٥° مع خط الارض وبحيث يكون أثره الافقى م هـ  
 عمودا عليه . وبما ان قاعدة الهرم المذكور موجودة في هذا المستوى فيمكننا ان نطبق

هذا المستوى على أحد مستويي المسقط وليكن على المستوى الأفقى وتعين عليه مواضع قاعدته الهرم بعد الانطباق بشروطها المعينة بان نرسم خطا أفقيا موازيا لخط الأرض ويبعد عنه بمقدار بعد النقطة  $a$  عن المستوى الرأسى وهو اسم  $\theta$  ننتخب عليه نقطة مثل  $a$  تكون هى موضع النقطة  $a$  بعد الانطباق ونرسم  $a\theta$  يساوى  $3$  سم وهو طول أحد اضلاع القاعدة بحيث يميل على الأرض بزاوية ميل الضلع  $a\theta$  على المستوى الرأسى وهى هنا  $45^\circ$  يكون  $a\theta$  هو الضلع  $a\theta$  بعد الانطباق ثم نكون عليه المربع  $a\theta\theta\theta$  يكون هو موضع اضلاع قاعدة الهرم بعد الانطباق ونعين ايضا مركز القاعدة  $\theta$  وهى موقع العمود النازل من رأس الهرم على القاعدة ثم نرجع قاعدة الهرم ومركزها الى مسقطها قبل الدوران بالطريقة المشروحة فى مسألة (٤٦) وليكن المسقطان هما  $a\theta\theta\theta$  و  $a\theta\theta\theta$

ويلاحظ ان المسقط الرأسى للقاعدة بما فى ذلك مركزها واقع باكماله على الأثر الرأسى  $\theta$ . بعد ذلك نقيم عمودا من  $\theta$  على الأثر الرأسى  $\theta$  ومن  $\theta$  عمودا على الأثر الأفقى  $\theta$  فهذان العمودان هما المسقطان الرأسى والأفقى لارتفاع الهرم فاذا أخذنا  $\theta$  مساوى ارتفاع الهرم لأنه مسقط موازى للمستوى الرأسى فهو بعد حقيقي تكون  $\theta$  هى المسقط الرأسى لرأس الهرم  $\theta$  مسقطها الأفقى على الخط  $\theta$  فنصل  $\theta$  بالمساقط الرأسية لركان القاعدة يتكون المسقط الرأسى للهرم  $\theta$   $a\theta\theta\theta$  ونصل  $\theta$  بالمساقط الأفقية لركان القاعدة يتكون المسقط الأفقى له  $\theta$   $a\theta\theta\theta$  وهو المطلوب

نتيجة :

يمكن اذا بطريقة دوران المستويات العمودية رسم مسقطى أى جسم منشورى أو اسطوانى أو هرم أو مخروطى الخ بمعلومية ابعاده وميل أحد أوجهه على أحد مستويي المسقط فى أوضاع مختلفة وبشروط معينة يكون من الصعب استيفائها بالطرق غير دوران المستويات أو للمستويات المساعدة ولذا يحسن الطالب أن يعطى اهتماما زائدا بهذا الباب .

تَنْبِيْہُ - دورانِ مسنوی مائِلِ ہولِ اُمیرِ اُتْرِیہ و انطباعِ علی اُمیر

مستوى المسقط

المفروض : المستوى ل م هـ المعلوم ميله ثلثي كل من مستويي المسقط ولتكن ⑥

زاوية ميله على الافقى و  $\phi$  زاوية ميله على المستوى الرأسى

والمطابق : دوران المستوى لـ م حول أحد أثريه وانطباقه على أحد

## مستوى المسقط

العمل :

(١) : دورانه المستوي حول اثاره الأفقي وانطباقه على المستوى الأفقي

نعمين أولا أثرى المستوى الذى يعيل بالزاوية  $\theta$  على المستوى الافقى

والرأسي على التوالى بالطريقة المذكورة فى مسألة ٢٠ صفحة ٨٣ . وليكن المستوى

هو م م شكل ٢١٣ ثم ننتخب نقطة على الأثر الرأسى مثل هـ ونأق بمسقطها

الأفقى وهو على خط الأرض فإذا دار المستوى تكون المسافة  $m$  ثابتة في كل

وضع من أوضاع المستوى أثناء تحركه

ويكون المحل الهندسي لمسقط ح الافقى

أثناء الدوران هو خط مستقيم عمودي

على الاثر الافقى م ه فترکز فی م

و بنصف قطریساوی م م و ن رسم قوسا

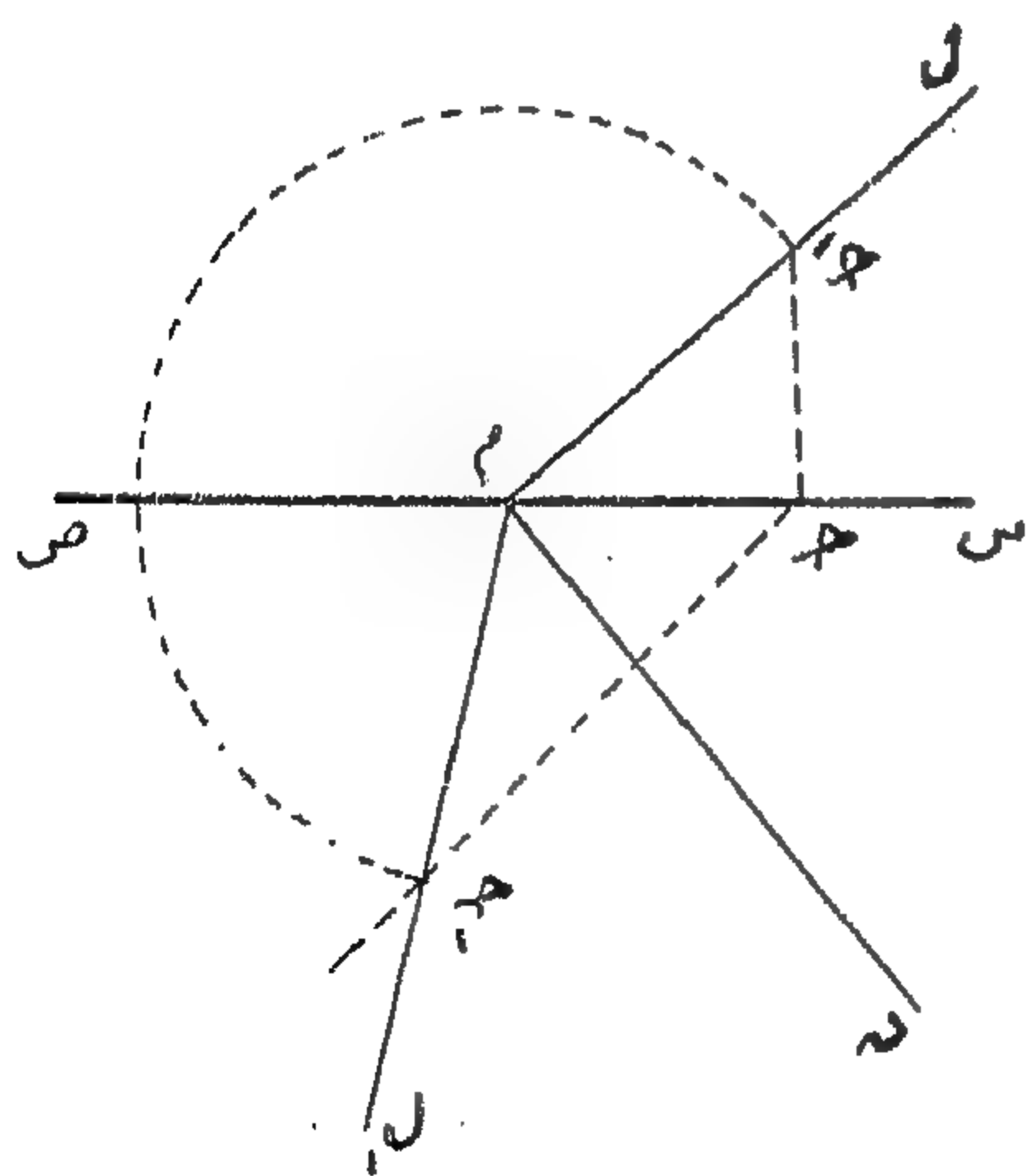
وزرسم من م عمودا على الاثر الافقى

م به ونمده الى ان يلاقى القوس المذکور

في حـ م فصل م حـ يكون هو الاثر

الراسي للمستوى ل م ه بعد انطباقه

على المستوى الاقنى وهو المطلوب



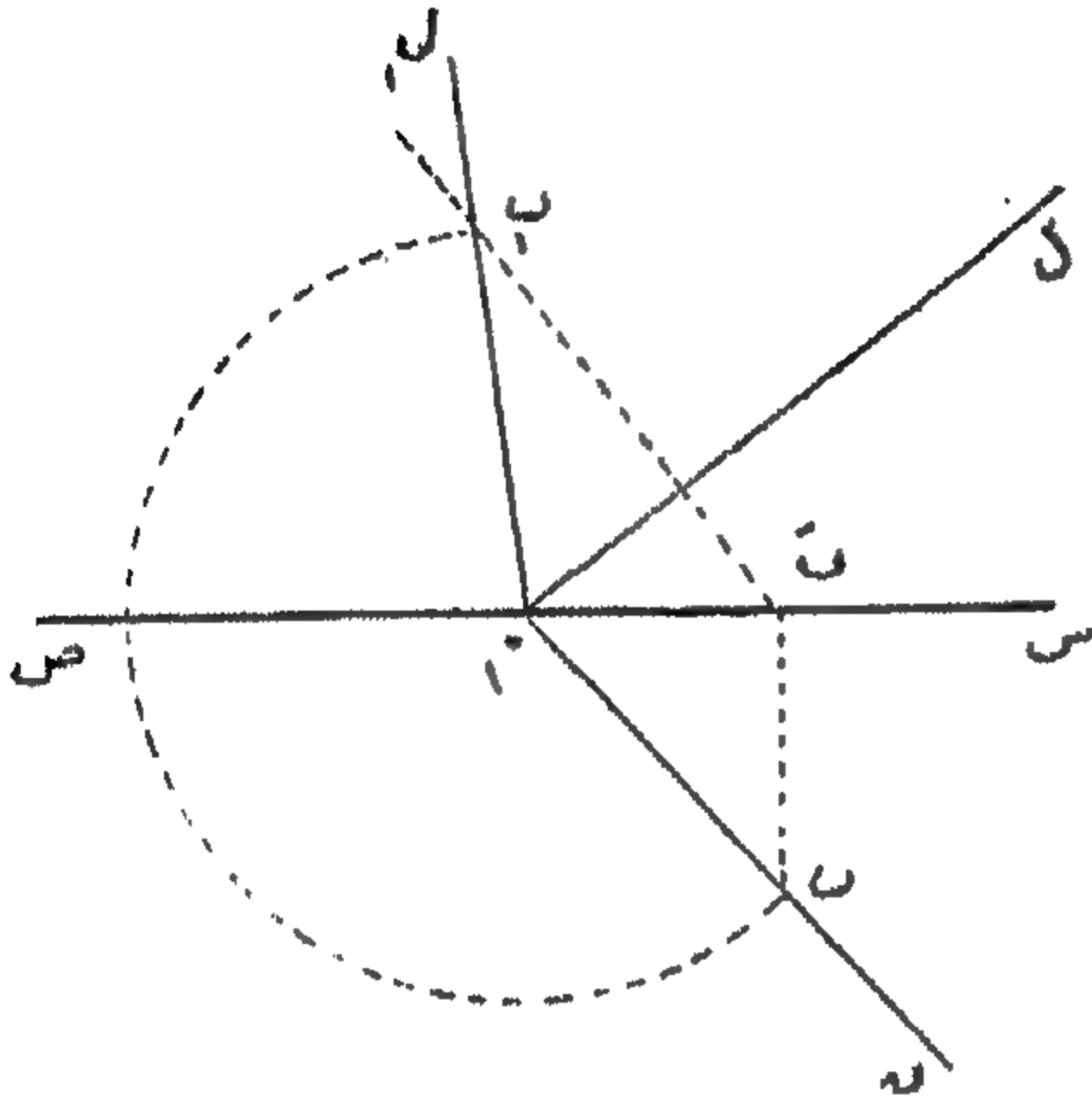
(شکل ۲۱۲)

وضع من أوضاع المستوى أثناء تحركه ويكون المحل الهندسي لمسقط ح الأفقي أثناء الدوران هو خط مستقيم عمودي على الأثر الأفقي م ه فتركز في م ونصف قطريساوي م ه ونرسم قوسا ونرسم من م ه عمودا على الأثر الأفقي م ه ونمده الى أن يلاقى القوس المذكور في ح ثم نصل م ح يكون هو الأثر الرأسى للمستوى ل م ه بعد انطباقه على المستوى الأفقي وهو المطلوب



( ب ) دورانه المستوى وانطباقه على المستوى الرأسى : —

نعين المستوى كما سبق وليكن  $L$  م  $هـ$  ( شكل ٢١٣ ) ثم ننتخب أى نقطة مثل  $ب$  على الاثر الأفقى  $م هـ$  ونعين مسقطها الرأسى وهو  $ب'$  على خط الأرض فإذا أدركنا المستوى  $L$  م  $هـ$  حول أثره



( شكل ٢١٣ )

الرأسى تظل المسافة  $م ب$  ثابتة أثناء دورانه الى ان ينطبق على المستوى الرأسى وعند ذاك يكون المحل الهندسى للمسقط الرأسى للنقطة  $ب$  هو العمود النازل من  $ب'$  على الاثر الرأسى  $L$  م فنركز في  $م$  ونصف قطر  $م ب'$  ونرسم قوسا من دائرة ومن  $ب'$  ننزل عمودا على  $L$  م ونعده الى أن يلاقى القوس

المذكور فى نقطة مثل  $ب$  فنصل  $م ب$  يكون هو الاثر الأفقى للمستوى  $L$  م  $هـ$  بعد الانطباق وهو المطلوب

مسألة ٥١ — طريقة إيجاد وضع نقطة موجودة فى مستو مائل معلوم

يعبر انطباقه على امر مستوي المسقط :

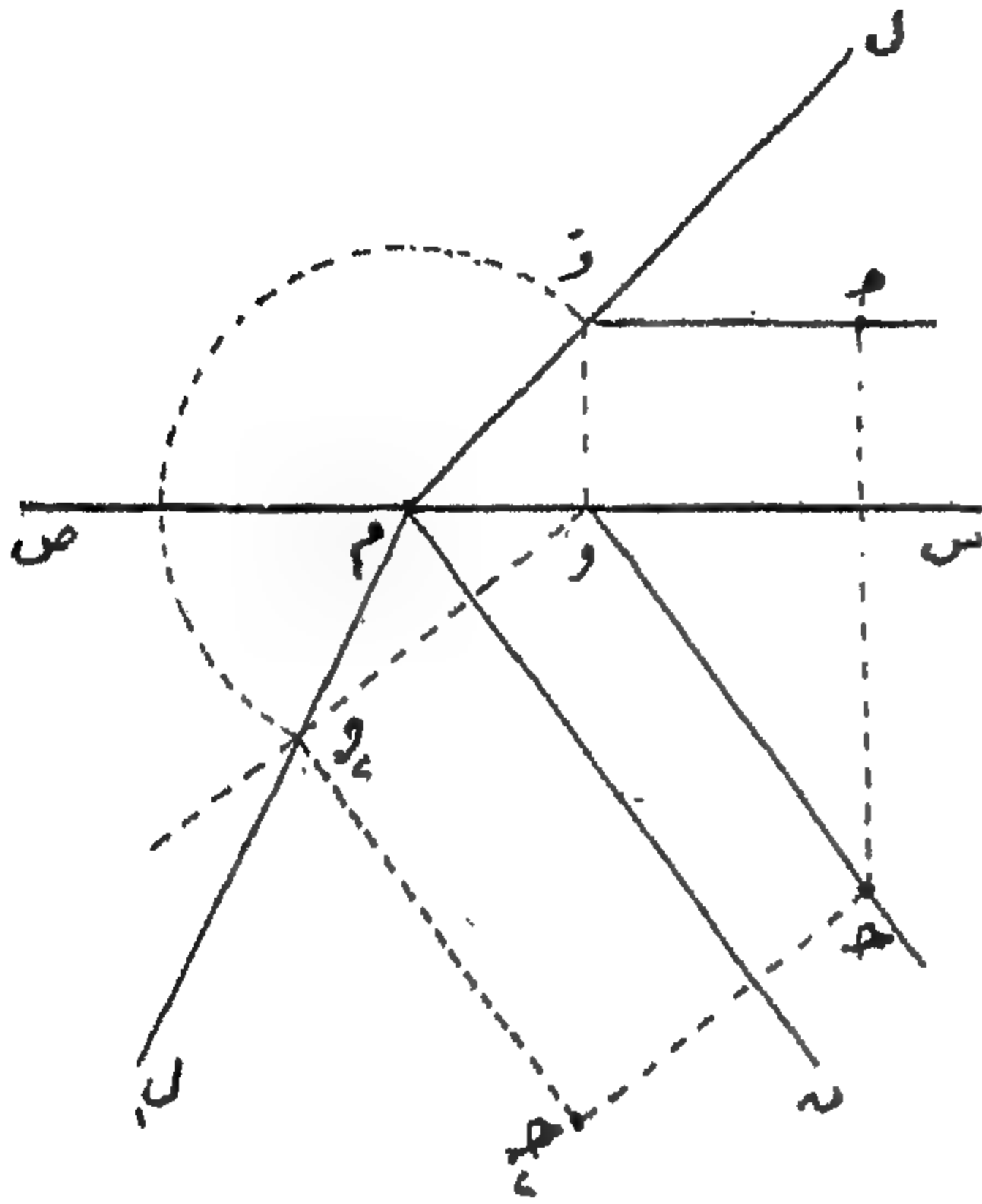
المفروض المستوى  $L$  م  $هـ$  ونقطة مثل  $ح$  واقعة على ذلك المستوى شكل ٢١٤

والطَّارِب : إيجاد موضع النقطة  $ح$  بعد دوران المستوى  $L$  م  $هـ$  حول أثره

الأفقى وانطباقه على المستوى الأفقى

نرسم الخط الأفقى الموجود فى المستوى  $L$  م  $هـ$  ومار بالنقطة  $ح$  بان نرسم خطا افقيا من  $ح$  ونعده الى ان يقابل الاثر الرأسى  $L$  م  $هـ$  فى  $و$  ثم من  $ح$  نرسم خطا موازيا للاثر الأفقى  $م هـ$  ونعده الى ان يلاقى خط الأرض فى  $و$  تكون هى المسقط الأفقى للنقطة  $ح$  وواقعة على العمود النازل منها على خط الأرض حسب ما ذكر سابقا فى

خاصية الخط الافقى فاذا أدركنا المستوى حول اثره الافقى م ه الى أن ينطبق على



شكل (٢١٤)

المستوى الافقى يظل الخط ح و  
افقيا وموازيا للاثر الافقى م ه  
وبعد الانطباق يكون ح و  
موازيا للاثر الافقى م ه .  
فاذا عيننا موضع النقطة و بعد  
الانطباق وهى نهاية الخط ح و  
ولتكن و ه ورسمنا منها خطا و م ه  
موازيا للخط م ه يكون هذا  
الخط هو وضع الخط ح و بعد  
الانطباق ويكون المحل الهندسى  
لنقطة ح عليه هو خط عمودى  
على م ه من ح فاذا رسمنا من

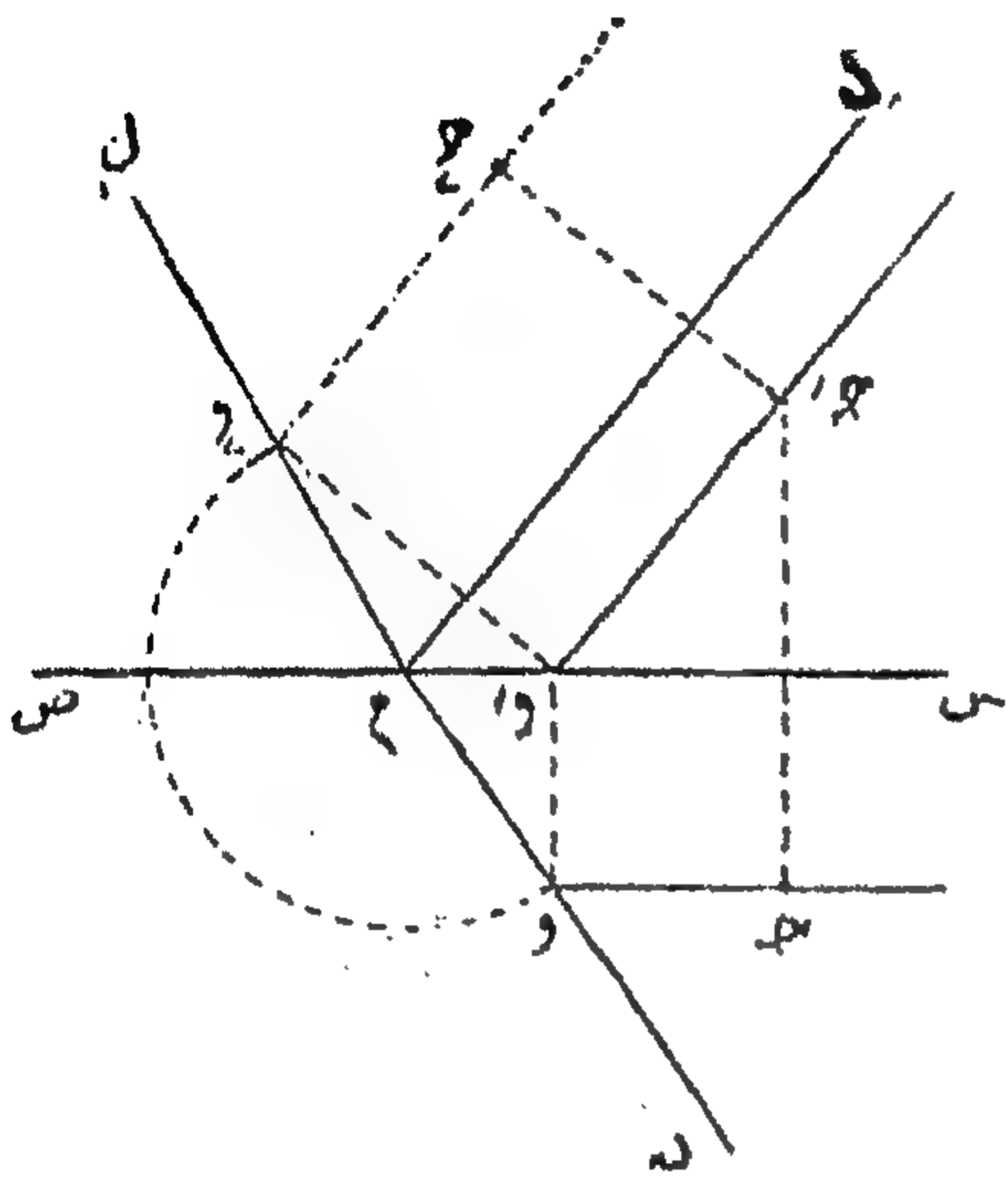
ح عمودا على م ه الى أن يقابل الخط و م ه فى ح م تكون ح م هى الموضع المطلوب  
لنقطة ح بعد الانطباق شكل (٢١٤) وهو المطلوب

(ب) المفروض : المستوى ل م ه ونقطة مثل ح واقعة على ذلك المستوى

شكل (٢١٥)

والمطلوب : إيجاد موضع النقطة ح بعد دوران المستوى ل م ه حول اثره  
الرأسى وانطباقه على المستوى الرأسى

العمل : نرسم خطا مستقيما موازيا للمستوى الرأسى فى المستوى ل م ه ومارا  
بالنقطة ح بان نرسم من ح خطا موازيا لخط الارض ونمده حتى يلاقى الاثر الافقى  
م ه فى نقطة مثل و ونأتى بالمسقط الرأسى للنقطة و وهى و على خط الارض ومن  
و نرسم خطا موازيا للاثر الرأسى ل م ه فلا بد وأن يمر بالنقطة ح المسقط

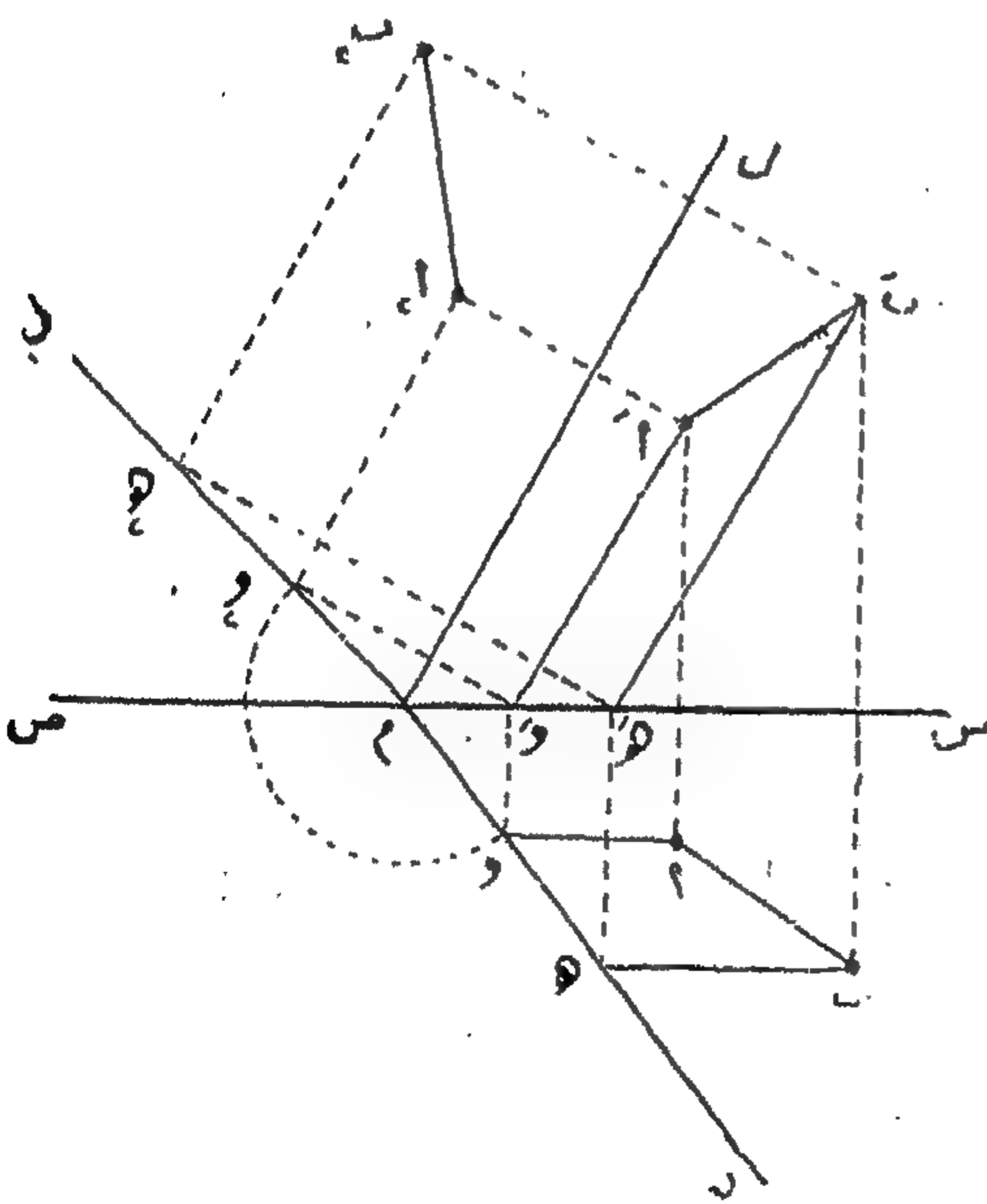


شكل (٢١٥)

الرأسي للنقطة وهو  $م$ . بعد ذلك  
نركز في  $م$  ونصف قطر يساوي  
 $م$  و نرسم قوساً ومن  $و$  نرسم  
عموداً على  $د$  ونمده حتى يقابل  
القوس المذكور في  $و$  ثم نصل  $و$   $م$   
يكون هو الاثر الاقصى الجديد بعد  
الانطباق ثم نرسم من النقطة  $و$   
الخط  $ر$   $ح$  موازياً الى  $د$  وهذا  
وضع الخط  $و$   $ح$  بعد الانطباق  
فاذا رسمنا عموداً من  $ح$  على الاثر  
 $ل$   $م$  ليقابل الخط  $و$   $ح$  في  $ح$

تكون  $ح$  هي موضع النقطة  $ح$  بعد انطباق المستوى على المستوى الرأسى شكل  
(٢١٥) وهو المطلوب

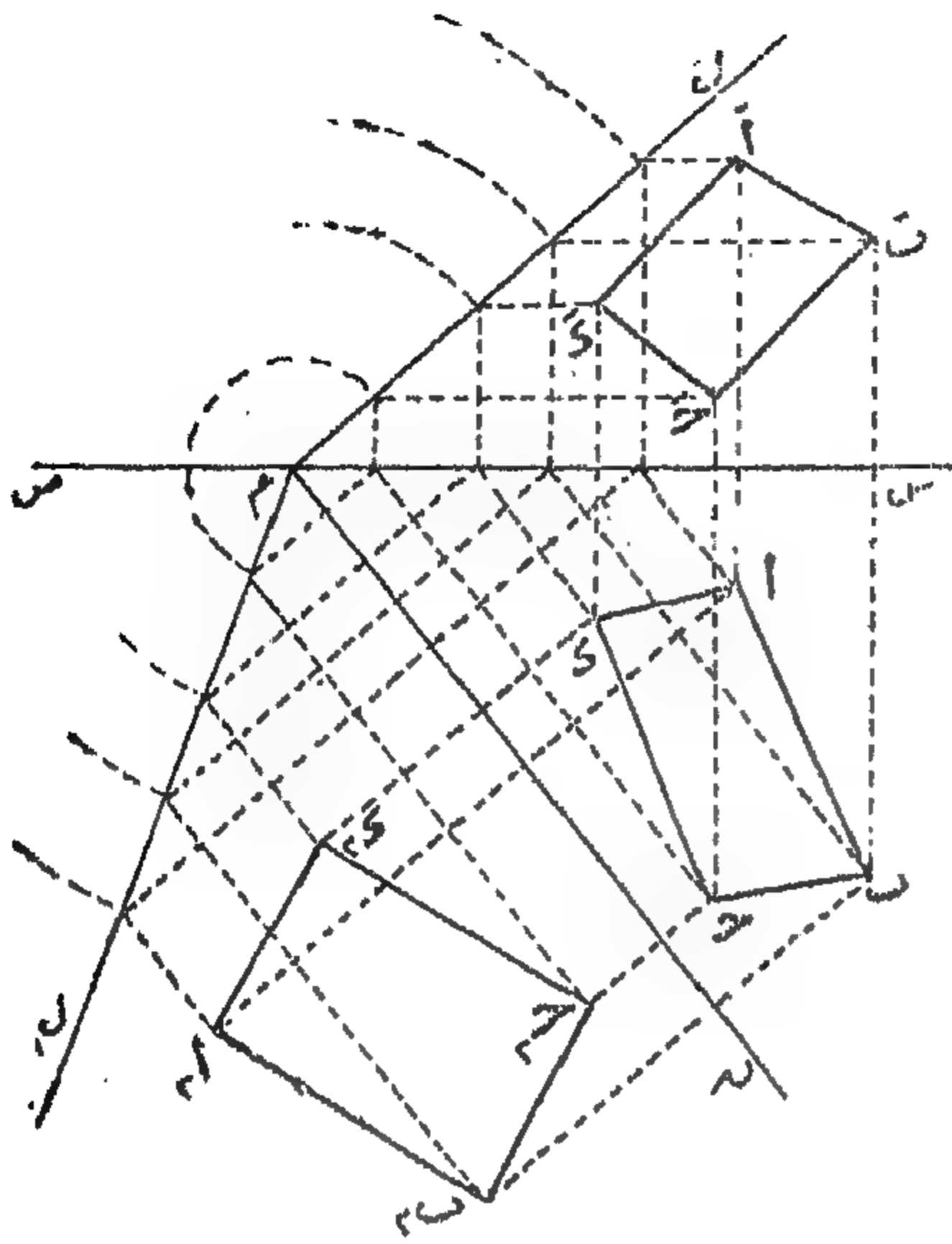
نتيجة :



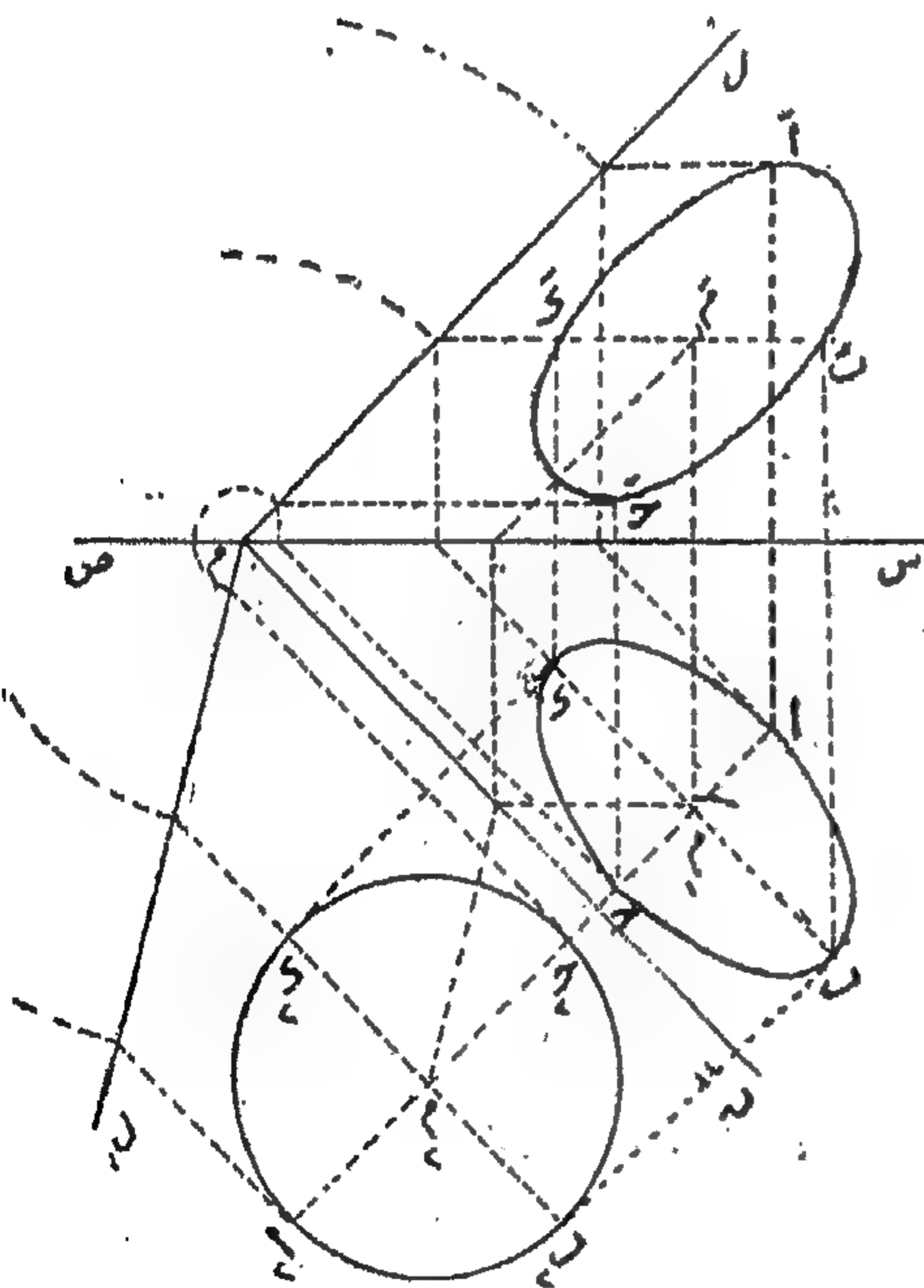
شكل (٢١٦)

أولاً : يمكن إيجاد وضع  
أى خط مستقيم معلوم مسقطاه  
موجود في مستوى ايا كان  
ومعلوم ميل هذا المستوى على  
كل من مستويي المسقط وذلك  
بإيجاد موضعي نقطتين منه  
بالطريقة المشروحة في المسألة  
السابقة فالخط  $ا ب$  هو موضع  
الخط  $ا ب$  الموجود في المستوى  
لم  $ن$  شكل (٢١٦) وواضح

بالشكل المذكور طريقة العمل والخط  $ا ب$  هو الطول الحقيقي للخط  $ا ب$



(شكل ٢١٧)



(شكل ٢١٨)

ثانيا : يمكن إيجاد الشكل الحقيقي ووضع أى شكل مستو موجود فى مستوى معلوم ميله على كل من مستوي المسقط بمعلومية مسقطي ذلك الشكل على كل من مستوي المسقط وذلك بتمرير خطوط أفقية برؤوسه إن كان مضاعفا أو بعدة نقط عليه إن كان منحنيا وإيجاد مواضعها بعد الانطباق

فالشكل  $ا ب ج د هـ و ز ح$  هو الشكل الحقيقي وموضع المضلع  $ا ب ج د هـ و ز ح$  الموجود فى المستوى  $ل م ن$  شكل (٢١٧)

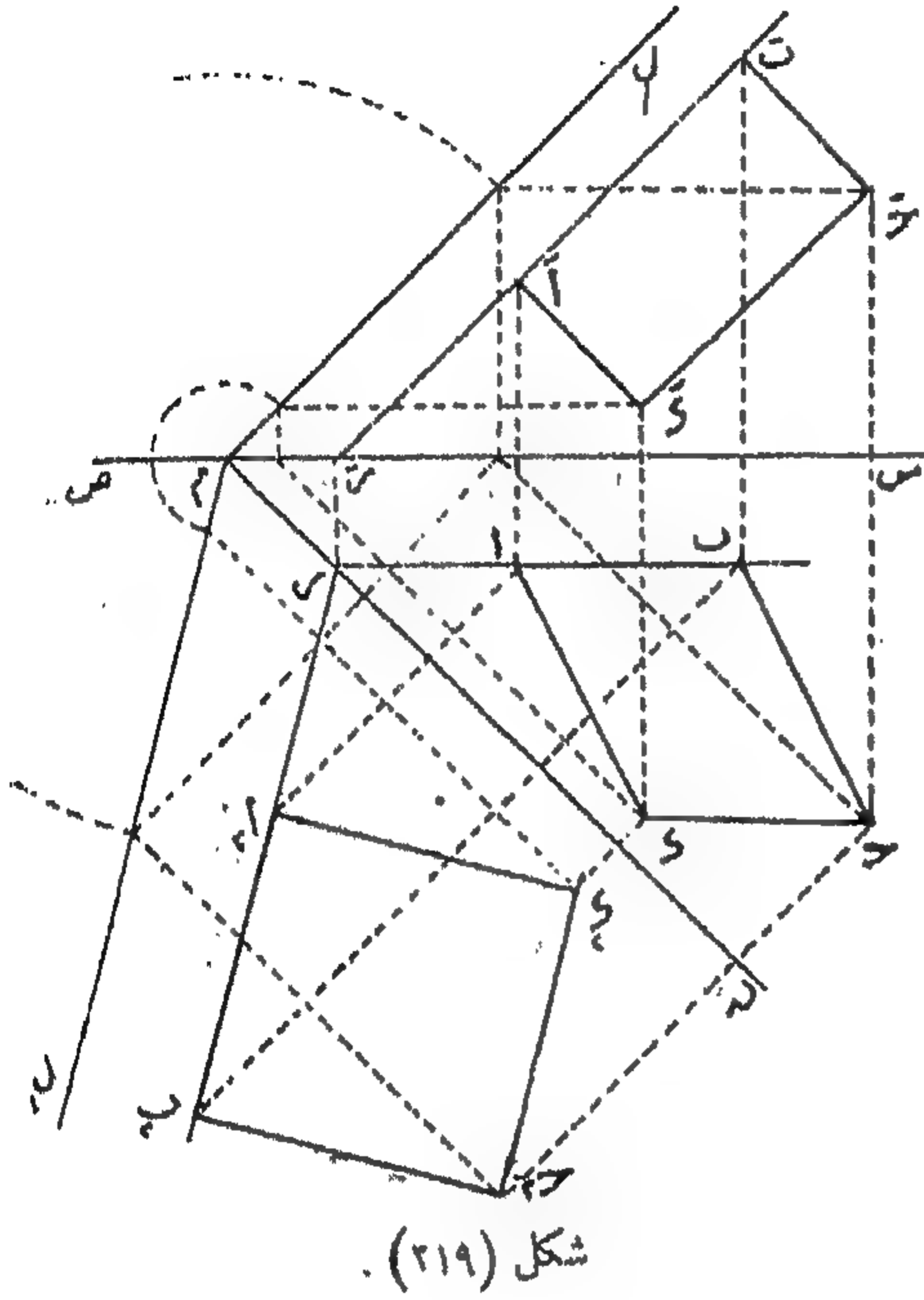
وكذا الشكل  $ا ب ج د هـ و ز ح$  هو الشكل الحقيقي ووضع الدائرة  $ا ب ج د هـ و ز ح$  الموجودة فى المستوى  $ل م ن$  شكل (٢١٨)

مسألة : (٥٢) - تعيين مسقطي شكل مستوي أيا كان معلوم أبعاده وزاويتي ميل مستويه على كل من مستوي المسقط بشروط معينة

(١) المفروضة : المربع  $ا ب ج د$  طول ضلعه ٣ سم موجود فى مستوى

يميل بالزاويتين  $٥٠^\circ$  و  $٦٠^\circ$  على الأفقى والرأسى على التوالى

والمطلوب : إيجاد مسقطي هذا المربع بحيث يكون أحد أضلاعه  $ab$  موازيا للمستوى الرأسى ويبعد عنه بمقدار  $١$  سم



شكل (٢١٩).

العمل : - نرسم أثرى المستوى المحتوى على المربع وهو الذى يميل بالزاوية  $\theta$  مع الافقى  $\phi$  مع الرأسى بالطريقة المعروفة وليكن المستوى  $ل م ن$  شكل (٢١٩) ثم نرسم خطا موازيا لخط الارض فى المسقط الافقى ويبعد عن خط الارض بمقدار  $١$  سم مثل الخط  $ab$  ونعده من جهة  $a$  إلى ان يلاقي الاثر الافقى  $م ن$  فى نقطة  $س$  مسقطها الرأسى  $س'$  على خط الارض ونرسم من  $س'$  خطا موازيا

للاثر الرأسى  $ل م ن$  يكون هو المسقط الرأسى للخط  $س ا ب$  بفرض أنه فى المستوى  $ل م ن$  ونعین عليه المسقطين الرأسين للنقطتين  $a$  و  $b$  وهما  $a'$  و  $b'$

ثم ندير المستوى  $ل م ن$  حول أثره الافقى  $م ن$  ومعه المستقيم  $ab$  إلى أن ينطبق على المستوى الافقى وليكن  $ل م ن$  هو الاثر الرأسى بعد الانطباق و  $ا ب س$  هو موضع الخط  $ab$  بعد انطباق المستوى وهو فى هذه الحالة موازيا للاثر الرأسى كما كان موازيا له قبل الدوران.

ثم نأخذ على المستقيم  $ا ب س$  ابتداء من  $ا$  بعدا يساوى  $٣$  سم وليكن  $ا ب س$  وهو ضلع المربع المطلوب ونسکون على هذا الضلع المربع  $ا ب س د$  وهو وضع المربع المطلوب إيجاد مسقطيه بعد انطباق المستوى  $ل م ن$  على



الافقى ثم نرجع المستوى لـ م<sub>١</sub> الى وضعه الاصلى ومعه المربع فينتج مسقطي المربع  $\alpha \beta \gamma \delta$  وهو المطلوب

ب- المفروض: الدائرة م<sub>١</sub> نصف قطرها ٢ سم الموجود في المستوى الذى يميل بالزاوية  $\theta$  مع الافقى والزاوية  $\phi$  مع الرأسى

والمطلوب: تعيين مسقطى تلك الدائرة بشرط أن يبعد مركزها عن المستوى الرأسى بمقدار ٣ سم

العمل: نرسم أولا المستوى لـ م<sub>١</sub> يميل بالزاوية  $\theta$  مع الافقى والزاوية  $\phi$  مع الرأسى شكل (٢١٨) ثم ننتخب نقطة مثل م<sub>١</sub> فى المسقط الافقى تحت خط الارض وتبعد عنه بمقدار ٣ سم ونأتى بالمسقط الرأسى لتلك النقطة بفرض أنها موجودة فى المستوى لـ م<sub>١</sub> وليكن م<sub>١</sub> مسقطها الرأسى ثم ندير المستوى لـ م<sub>١</sub> حول أثره الافقى م<sub>١</sub> الى أن ينطبق على المستوى الافقى عند لـ م<sub>١</sub> ومعه النقطة م<sub>١</sub> فتأخذ الوضع م<sub>١</sub> ونجعل م<sub>٢</sub> مركزا للدائرة المطلوبة ونصف قطر يساوى ٢ سم ونرسم دائرة

ثم نرجع المستوى لـ م<sub>١</sub> ومعه الدائرة م<sub>١</sub> الى وضعه الاصلى فينتج مسقطي الدائرة م<sub>١</sub> كما هو مبين بالشكل وهو المطلوب.

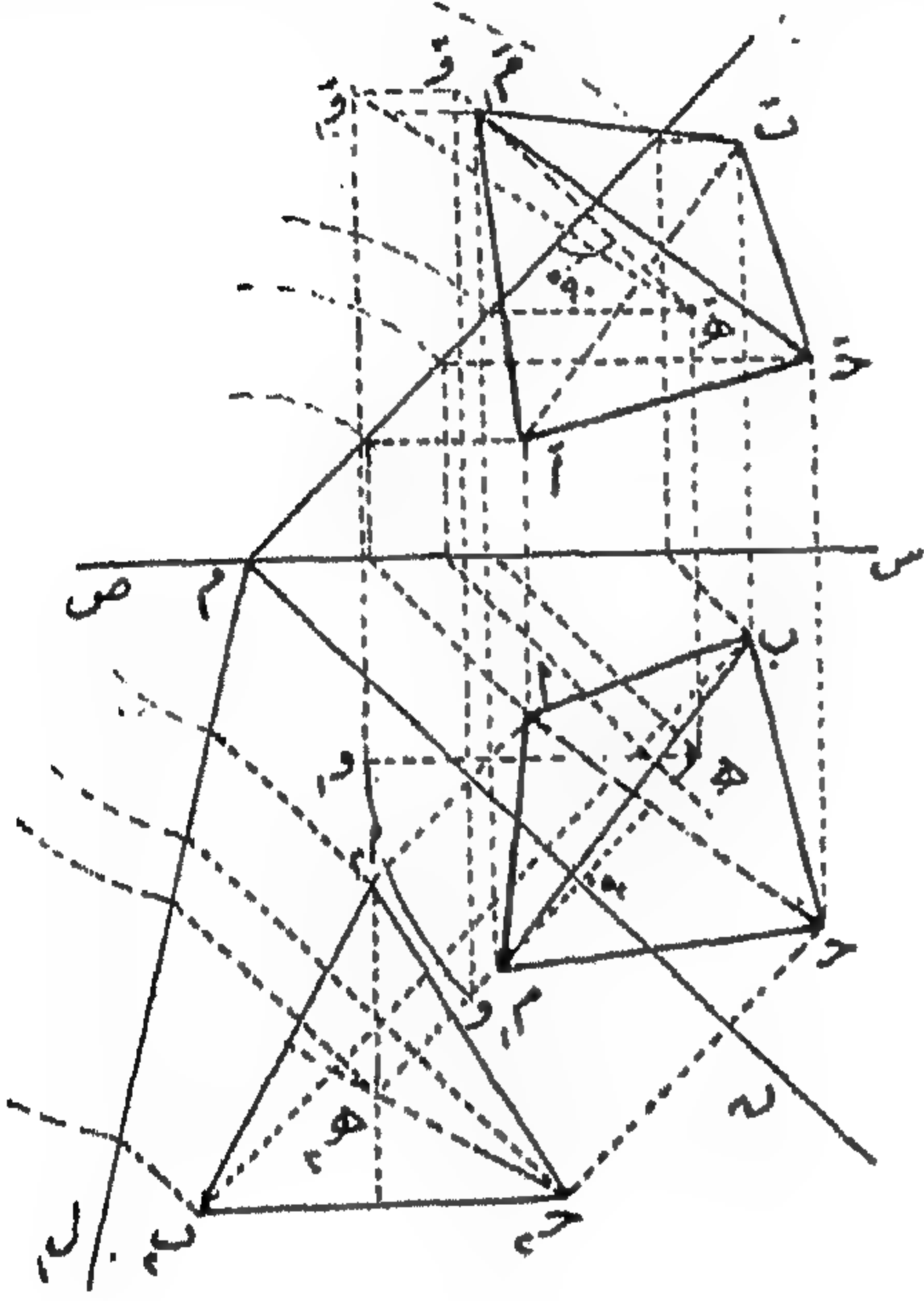
وبهذه الطريقة يمكن إيجاد مسقطي أى شكل مستوى معلوم إبعاده الحقيقية وميله فى الفراغ مضلعا كان أو منحنيا مهما كان شكله.

مسألة (٥٣): طريقة إيجاد مسقطي أى جسم فى أوضاع مختلفة وبشروط معينة

المفروض: هرم ثلاثى قائم م<sub>١</sub> ا ب ح قاعدته مثلث ا ب ح متساوى الاضلاع معلوم طول أحد أضلاعه ومعلوم طول ارتفاع ذلك الهرم

والمطلوب: إيجاد مسقطي ذلك الهرم بشرط أن يميل قاعدته على المستوى الافقى بزاوية  $\theta$  وعلى المستوى الرأسى بزاوية  $\phi$

العمل : نعلم أن قاعدة الهرم موجودة في مستوي ميل بالزاوية  $\theta$  و  $\phi$  على كل من مستويي المسقط الأفقي والرأسي على التوالي فنبدأ أولاً برسم أثر هذا المستوي وليكن



شكل (٢٢٠)

المستوى  $ل م ن$  به شكل (٢٢٠) ثم نديره الى أن ينطبق على أحد مستويي المسقط وليكن على المستوي الأفقي فينطبق أثره الرأسي  $ل م ن$  على المستوي الأفقي ويأخذ الوضع  $ل م ن$  بعد الانطباق ثم نرسم الشكل الحقيقي لقاعدة الهرم بإبعادها الحقيقية المطلوبة ولتكن  $ا ب ج د$  وكذا نعين مركزها وليكن  $م$  ثم نرجع المستوي  $ل م ن$  به الى وضعه قبل الدوران ومعه قاعدة الهرم المذكور وليكن مسقطا

القاعدة هما  $ا ب ج د$  و  $ا ب ج د$  مركزها هما  $د$  و  $د$  ثم نرسم من  $د$  عموداً على المستوي  $ل م ن$  به أو بمعنى آخر من  $د$  نرسم عموداً على  $ل م ن$  و  $د$  من  $د$  نرسم عموداً على  $ل م ن$  ونأخذ على ذلك العمود أي نقطة مثل  $و$  ونأتي بالطول الحقيقي للجزء  $د و$  ونأخذ عليه الطول الحقيقي لارتفاع الهرم وليكن  $م$  ونعين مسقطي نقطة الرأس  $م$  وليكن مسقطاها  $م$  و  $م$  ثم نصل  $م$  بالنقط  $ا ب ج د$  يتكون المسقط الرأسي للهرم ونصل  $م$  بالنقط  $ا ب ج د$  يتكون المسقط الأفقي للهرم ويجب مراعاة الخطوط الشعاعية وغير الشعاعية اذا كانت احرف الواجه غير ظاهرة أو ظاهرة على التوالي وهو المطلوب

## نتيجة :

يمكن بنفس الطريقة رسم أي جسم آخر كالمنشور والمكعب والاسطوانة والهرم الرباعي والمخروط الخ متى علمنا أبعاده الحقيقية وميل أي وجه من أوجهه على كل من مستويي المسقط أو على كليهما بان نرسم المستوى المحتوي على ذلك الوجه أولا كما سبق في المسألة السالفة ثم نعين مسقطي خط مستقيم في ذلك المستوى ويميل بالميل المطلوب على كل من مستويي المسقط وبعد ذلك نطبق المستوى ومعه الخط على أحد مستويي المسقط فيجعل هذا الخط وهو منطبقا على أحد مستويي المسقط ضلعا من الوجه الذي يميل بالميل المطلوب ورسم باقي أضلاع الوجه المعلوم عليه مثلثا كان أو مربعا أو أي مضلع أو منحنى بشكله الحقيقي بعد إيجاد مركزه إذا لزم الحال وبعد ذلك نعين مسقطي نقطة الرأس إذا كان هرما أو مخروطا أو أحرف أوجهه إن كان منشوريا أو اسطوانيا وذلك برسم أعمدة على الأثرين الرأسى والافقى من المسقط الرأسى والافقى على التوالي لمركز القاعدة إذا كان هرما أو مخروطا أو برسم أعمدة من المساقط الرأسية والافقية لنقطه أركان القاعدة الذي تم إيجاد مسقطيها على الأثر الرأسى والافقى لمستويها على التوالي إن كان الجسم منشوريا أو اسطوانيا والاستمرار في العمل كما توضح في المسألة (٥٣) إلى أن يتم المسقطان الرأسى والافقى للجسم وهو المطلوب .

وبذلك يمكننا أن نستخلص مما سبق أن طريقة دورانه المستويات المائلة في الفراغ وانطباقها على أحد مستويي المسقط تساعدنا كثيرا على إيجاد مساقط الاجسام في أوضاع مختلفة وبشرط معينة مما يصعب إيجادها بطريقة أخرى وسنترك للطالب فرصة التفكير والتخيل عند حل المسائل المتعلقة بهذا الباب حيث لا يمكن حصرها كلها في مسائل محاولة لكثرة أنواعها ولذا اكتفينا بحل بعضها .

## تمارينات ( ٦ )

على دورن المستويات حول احد اثريها وانطباقها على احد مستوي المسقط

(١) ارسم مسقطي مستقيم مثل ا ب تبعد كل من النقطتين ا و ب منه عن المستوى الرأسى بمقدار ٣ و ٢ سم على التوالي بشرط أن يميل المستقيم على المستوى الافقى بزاوية مقدارها ٤٥°

ارسم مسقطي هذا المستقيم اذا كان في مستو يميل بالزاوية ٤٥° و ٦٠° على الافقى والرأسى على المستوى

(٢) ارسم مسقطي المثلث ا ب ح الموجود في المستوى ل م ن العمودى على الرأس ومائل على الافقى بمقدار ٣٠° اذا كان هذا المثلث متساوى الاضلاع وطول أحد اضلاعه ٣ سم ويبعد مركزه عن المستوي الرأسى بمقدار ٢ سم واحد اضلاعه يميل بزاوية ٤٥° مع المستوى الرأسى

(٣) ا ب ح هو المسقط الافقى لمثلث يميل مستويه على المستوى الرأسى بزاوية مقدارها ٦٠° والمطلوب إيجاد مسقطه الافقى بشكله الحقيقى  
( انتخب أى ثلاث نقط ا و ب و ح على الاثر الافقى )

(٤) ارسم المسقطين الرأسى والافقى لدائرة نصف قطرها ٢ سم ويبعد مركزها عن المستوى الافقى بمقدار ٣ سم ويميل مستويها على المستوى الرأسى بمقدار ٣٠° ثم عين مسقطي أى قطر منها يميل بالزاوية ٤٥° مع المستوى الرأسى أيضا

(٥) ارسم المسقطين الرأسى والافقى لمربع طول ضلعه ٣ سم فى الاحوال الآتية  
أولا — اذا كان مستوى المربع يميل بزاوية ٥٠° مع المستوى الافقى ويميل أحد اضلاعه بزاوية مقدارها ٣٠° مع المستوى الرأسى

ثانيا — اذا كان أحد أضلاعه مائلا بزاوية ٤٥° وضلع آخر منه مائلا بزاوية ٣٠° مع المستوى الرأسى

ثالثا — اذا كانت نقط متتالية من نقط رؤوسه ترتفع بالمقادير ٢ و ٣ و ٥ سم على التوالي عن المستوى الافقى

رابعا - اذا كان مستويه يميل بالزاوية  $45^\circ$  على الافقي والرأسى على التوالى  
 (٦) اضلاع مثلث ا ب ح هي ا ب = ٥ سم و ب ح = ٦ سم و ح ا = ٧ سم  
 ارسم المسقط الافقى لدائرة تمر بالثلاث نقط ا ب و ح بحيث يميل مستوى  
 المثلث بالزاوية  $45^\circ$  مع المستوى الافقى

(٧) دائرة نصف قطرها ٤ سم تميل بالزاوية  $60^\circ$  مع الافقى و  $40^\circ$  مع الرأسى  
 وكان مركزها على مسافة مقدارها ٣ سم من كل مستويي المسقط ارسم مسقطي  
 تلك الدائرة .

ارسم الدائرة المذكورة اذا كان مستويها يميل بالزاوية  $45^\circ$  و  $60^\circ$  مع الافقى  
 والرأسى على التوالى .

(٨) ارسم مسقطي هرم منتظم قاعدته مربعة طول ضلعها ٤ سم وارتفاعه ٥ سم  
 فى الاحوال الآتية

أولا - اذا كان مركزا بقاعدته على مستوى يميل بزاوية  $45^\circ$  مع المستوى  
 الافقى ويصنع أحد اضلاع القاعدة  $45^\circ$  مع المستوى الرأسى

ثانيا - اذا كان مركزا بقاعدته على مستوى يميل بزاوية  $60^\circ$  مع المستوى الرأسى

ثالثا - اذا كان مركزا بقاعدته على مستوى يميل بزاوية  $45^\circ$  مع المستوى

الافقى وبزاوية  $60^\circ$  مع الرأسى وكان مركز قاعدته على بعد ٤ سم من المستوى الرأسى

(٩) اقطع الهرم المذكور فى المسألة السابقة فى الحالة الاولى بمستوي يميل مع

المستوى الافقى بزاوية مقدارها  $60^\circ$  ويمر بأحد أركان القاعدة ثم أوجد الشكل

الحقيقى للقطاع

(١٠) اقطع الهرم المذكور فى المسألة (٨) الحالة الثانية بمستوي عمودى يميل بالزاوية

$75^\circ$  مع المستوى الرأسى ويمر بأحد أركان القاعدة ثم أوجد الشكل الحقيقى للقطاع

(١١) ارسم مسقطي مخروط قائم نصف قطر قاعدته ٢ سم وارتفاعه ٤ سم وهو

مرتكزا بقاعدته على المستوى الافقى ثم اقطعه

أولا - بمستوي عمودى موازى لأحد روااسمه ويمر بمركز القاعدة

ثانيا - مائل على أحد روااسمه ولا يقطع القاعدة



ثالثا — بمستوى عمودى يميل على احدى روااسمه ويقطع امتداد راسم آخر  
فى جهة آخر من الرأس . وفى الاحوال الثلاثة اوجد شكل القطاع واذكر نوعه فيما  
يختص بالقطاعات المخروطية

(١٢) ارسم المستطين الرأسى والافقى لمخروط قائم نصف قطر قاعدته ٢ سم  
وارتفاعه ٥ سم فى الاحوال الثلاثة المذكورة فى نمرة ٨

(١٣) ارسم المستطين الرأسى والافقى لمنشور سداسى قائم طول ضلع قاعدته  
٢ سم وارتفاعه ٤ سم بحيث تميل قاعدته بمقدار  $25^\circ$  و  $30^\circ$  على الافقى والرأسى  
على التوالى .

(١٤) ارسم المستطين الرأسى والافقى لمنشور رباعى قائم قاعدته مربعة طول  
أحد أضلاعها ٢ سم وارتفاعه ٢ سم  
أولا — اذا كانت قاعدته المربعة تميل بمقدار  $30^\circ$  مع الرأسى وعموديه  
على الافقى

ثانيا — اذا كانت قاعدته المربعة تميل بمقدار  $25^\circ$  مع الافقى وعموديه على الرأسى  
ثالثا — اذا كانت قاعدته المربعة تميل بمقدار  $45^\circ$  و  $50^\circ$  مع الافقى والرأسى  
على التوالى

رابعا — اذا كان أحد أوجهه المستطيل يميل بالزاويتين  $45^\circ$  و  $60^\circ$  مع  
الافقى والرأسى على التوالى

(١٥) ارسم مسقطى منشور سداسى قائم طول ضلع قاعدته ٢ سم وارتفاعه  
٥ سم مرتكزا باحدى قاعدتيه على المستوى الافقى ثم أفقية بمستوى عمودى يميل مع  
الافقى بزاوية  $45^\circ$  ويقطع كل أوجهه المستطيلة وأوجد الشكل الحقيقى للقطاع

(١٦) ارسم المستطين الرأسى والافقى لاسطوانة نصف قطر قاعدتها ٢ سم  
وارتفاعها ٤ سم مرتكزة بأحدى قاعدتيها على المستوى الرأسى واقطعها بمستوى  
عمودى يميل على المستوى الرأسى بزاوية  $45^\circ$  ويمس احدى قاعدتي الاسطوانة  
ثم أوجد الشكل الحقيقى للقطاع واذكر من أى نوع من القطاعات

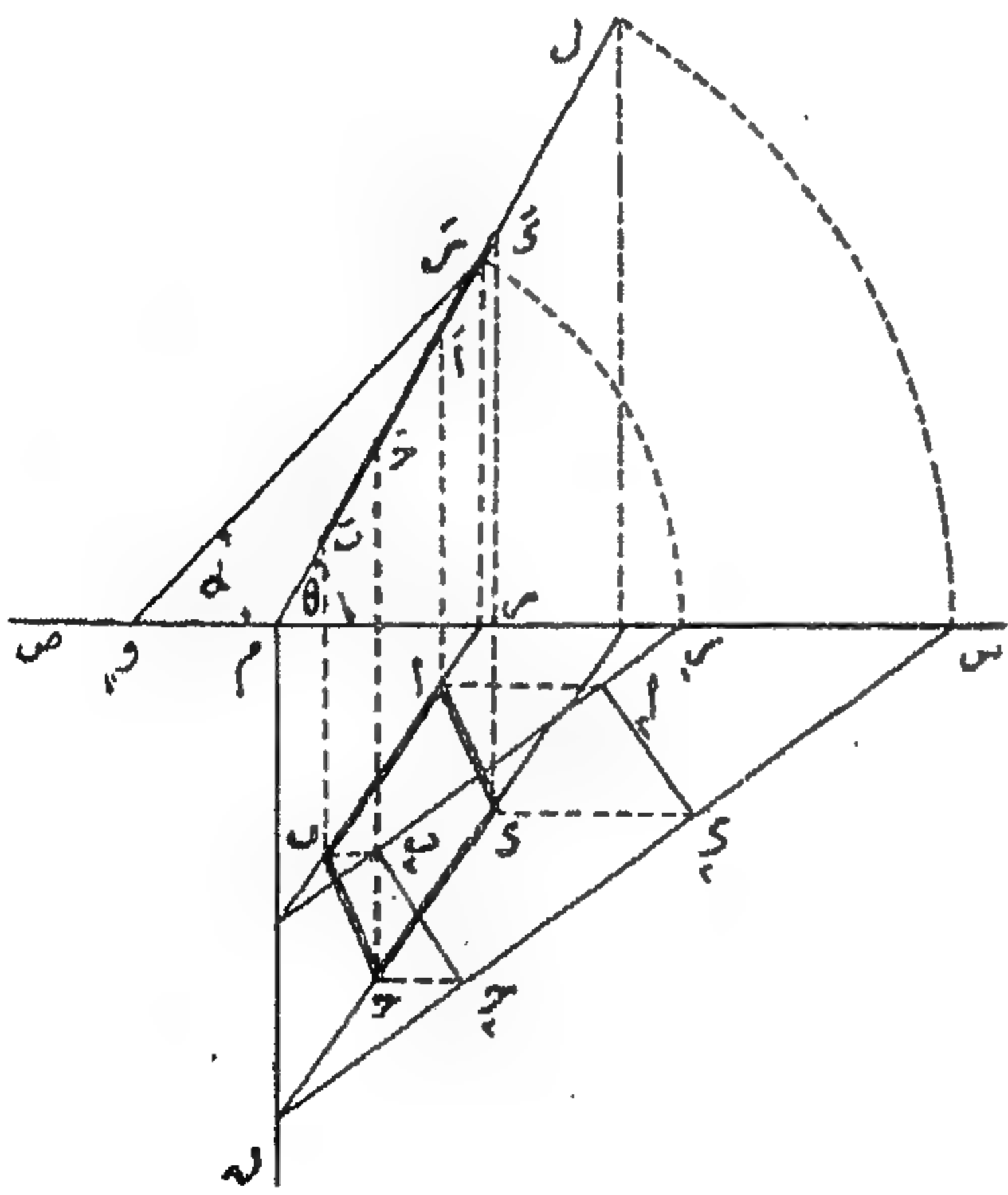
## تابع الفصل الثامن

في مساقط الاسطح المستوية والأجسام في أحوال متنوعة

بند ۳۰ مقدمة : تكلمنا في الفصل الرابع عن مساقط الاجسام في أبسط  
اوضاعها في الفراغ وفي الفصل الثامن عن دوران المستويات وبها أمكننا إيجاد مساقط  
الأسطح والاجسام بشروط معينة والآن نتكلم على مساقط الأسطح المستوية  
والاجسام في حالات خاصة أصعب مما سبق ذكره في الفصل الثامن

في مساقط الاشكال الهندسية المصفوية بشروط متنوعة

مسألة ٥٤ — تعيين مسقطي مستطيل معلوم ابعاده وموجود في مستوى عمودي معلوم ميله على أحد مستويي المسقط بشرط أنه يميل أحد أضلاع المستطيل بميل معلوم على أحد مستويي المسقط

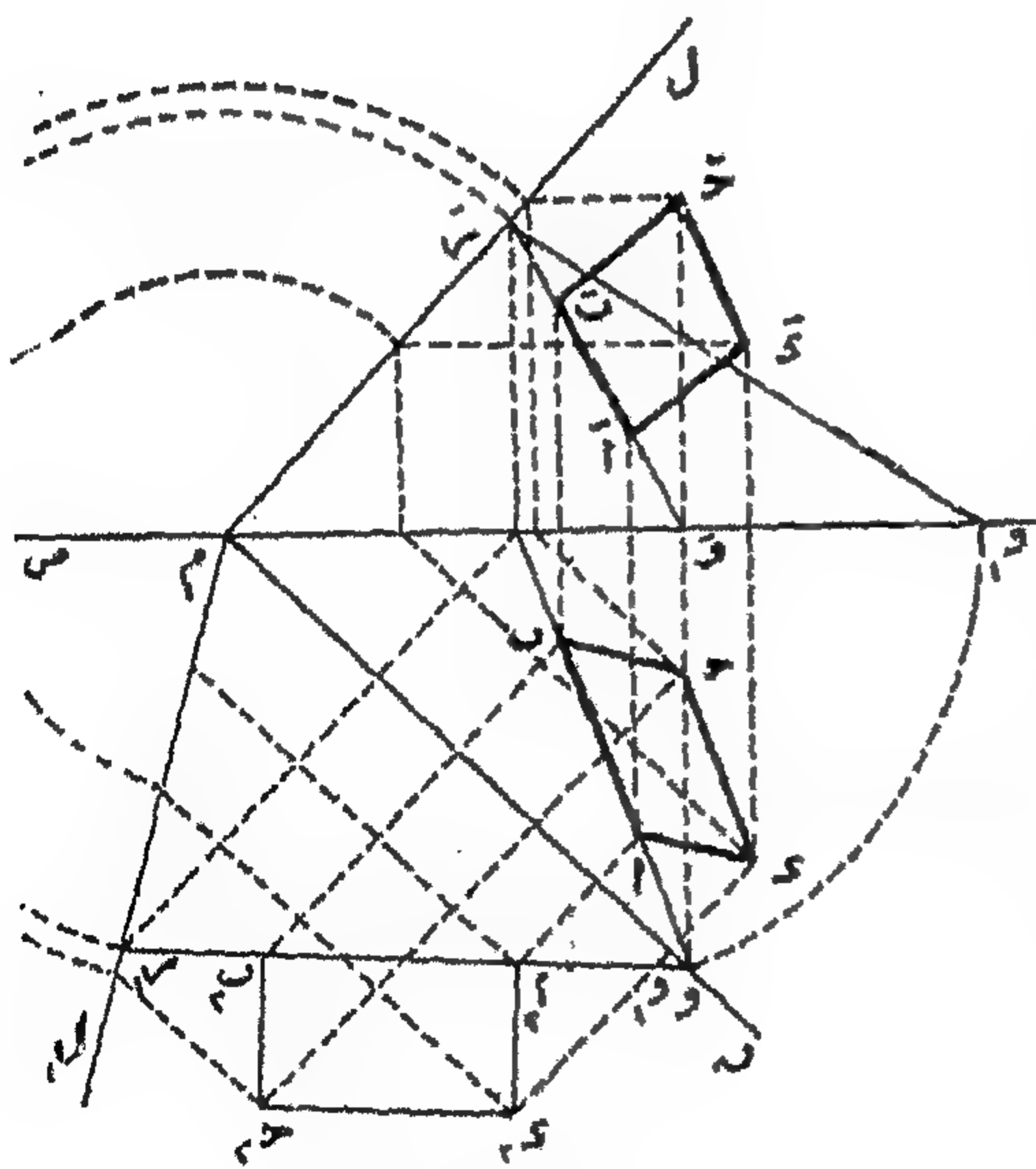


(۲۲۱) کی

المفروضه : - المستطيل  
ضاميه اب ح د معلوم طول كل  
من ا ب و ح د موجود في  
مستوي عميل بالزاوية  $\theta$  على المستوى  
الافقي وعمودى على الرأسى  
ويميل أحد أضلاعه اب بالزاوية  
 $\theta$  على المستوى الافقي أيضا

العمل : — نوسم المستوى  
المحتوى على المستطيل وليكن  
ن م هـ ( شكل ٢٢١ ) بحيث

يميل أثره الرأسى  $\theta$  مع خط الأرض ثم من أى نقطة مثل  $\alpha$  على أثره الرأسى نرسم الخط  $\alpha\omega$  ، ويميل بالزاوية  $\theta$  على خط الأرض وعمده حتى يلاقى خط الأرض فى  $\omega$  ، ثم نركز فى  $\omega$  المسقط الاقصى للنقطة  $\alpha$  وننصف قطر يساوى  $\omega\alpha$  ونرسم قوسا يقطع الاثر الاقصى  $\alpha\omega$  فى  $\omega$  ونصل  $\omega$  ويكون هو المسقط الاقصى لخط  $\alpha\omega$  بالزاوية  $\theta$  مع المستوى الاقصى ( وهى ميل الضلع  $\alpha\beta$  عليه ) وموجود فى المستوى  $\alpha\omega\theta$  الذى يميل على الاقصى بالزاوية  $\theta$  . وبعد ذلك ندير المستوى  $\alpha\omega\theta$  حول أثره الاقصى  $\alpha\omega$  ومعه المستقيم  $\omega\theta$  حتى ينطبق على المستوى الاقصى بالطريقة المشروحة فى الفصل السابق فينتج أن  $\alpha\omega$  هو وضع المستقيم  $\alpha\omega$  بعد الانطباق . نأخذ عليه نقطتين  $\alpha\omega$  بحيث يكون  $\alpha\omega$  مساويا لطول ضلع المستطيل  $\alpha\beta$  المعلوم ثم نكوّن على هذا الضلع مستطيلا  $\alpha\beta\gamma\delta$  ، وبالأبعاد الحقيقية للمستطيل المعلوم ثم نرجع هذا المستطيل الى وضعه قبل الدوران بفرض أنه موجود فى المستوي  $\alpha\omega\theta$  ينتج المسقطان الرأسى والاقصى  $\alpha\beta\gamma\delta$  و  $\alpha\beta\gamma\delta$  المستطيل على التوالى وهو المطلوب



(۲۲۲) كذا

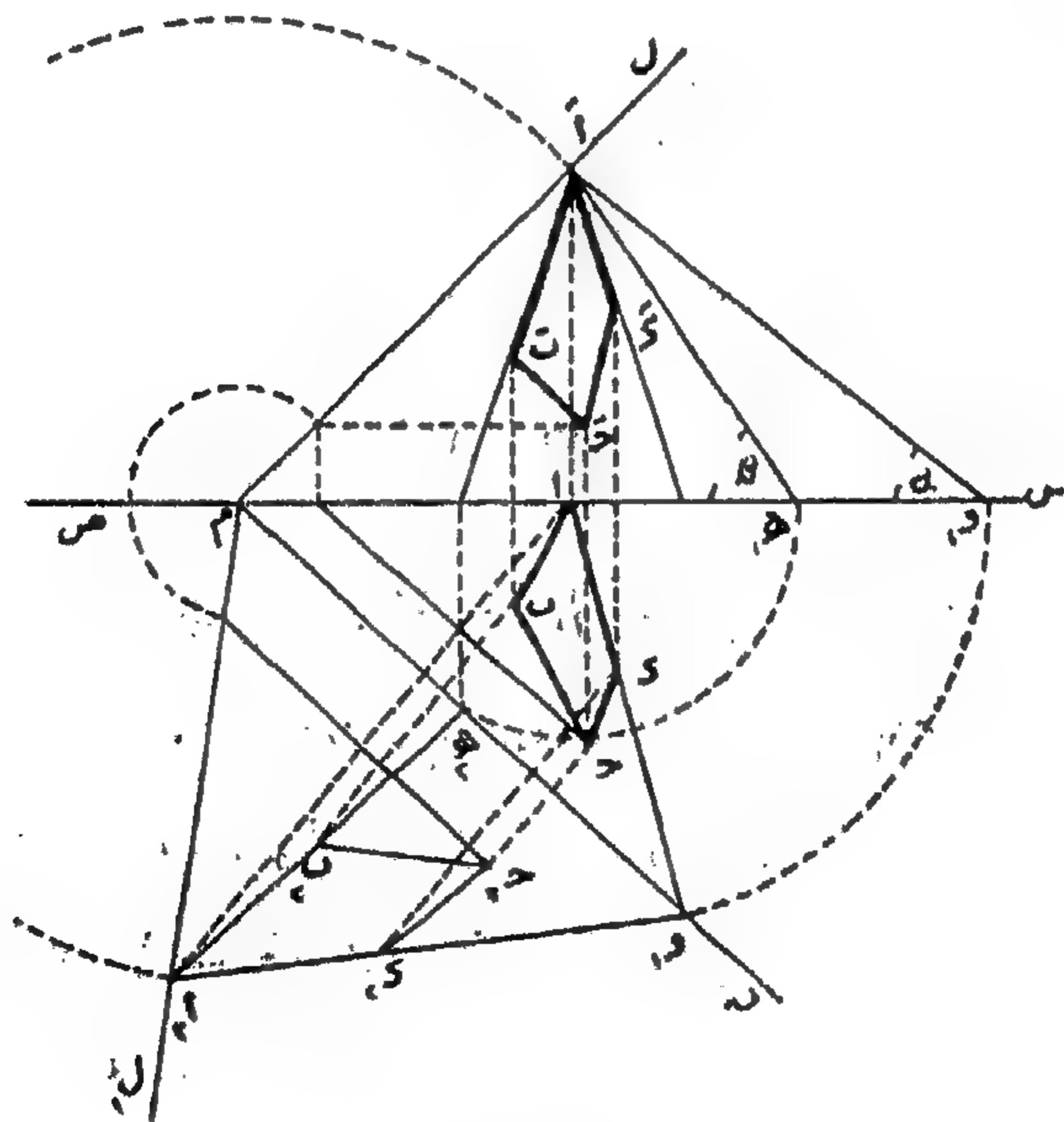
وبنفس الطريقة يمكن رسم  
مسطحي المستطيل  $abcd$   
المذكور إذا كان في مستواختياري  
والشكل ( ٢٢٢ ) يبين مسطحي  
مستطيل يميل بالزاوية  $\theta$  و  $\phi$  على  
المستوى الأفقي والرأسي علي  
التوالي ويميل ضلعه  $ab$  بالزاوية  $\alpha$   
على الأفقي وهي نفس الطريقة  
السابقة

فالمستقيم  $s$  و  $y$  ميل  
بالزاوية  $\theta$  مع الافقي ومسقطيه

فما رَوَّاهُ وَوَضَعَهُ بَعْدَ الْأَنْطِيقِ رَوَّاهُ عَلَيْهِ انْتَخِبَتْ أَرْبَعُ رَوَّاهٍ وَعَلَى أَرْبَعٍ  
يَسْمُ الْمُسْتَطِيلِ أَرْبَعُ رَوَّاهٍ بِإِعَادَةِ الْحَقِيقَةِ ثُمَّ ارْجِعْ إِلَى مَسْقُطِيهِ أَرْبَعُ رَوَّاهٍ  
فَبَلِّغِ الدُّورَانَ وَهُوَ الْمَطْلُوبُ

مسألة ٥٥ — تعيين مسقط على شكل مستوي بمعاملية ميله على مستويي المسقط  
وبمعاملية ميل ضامعين متقاطعين منه على آخر مستويي المسقط .

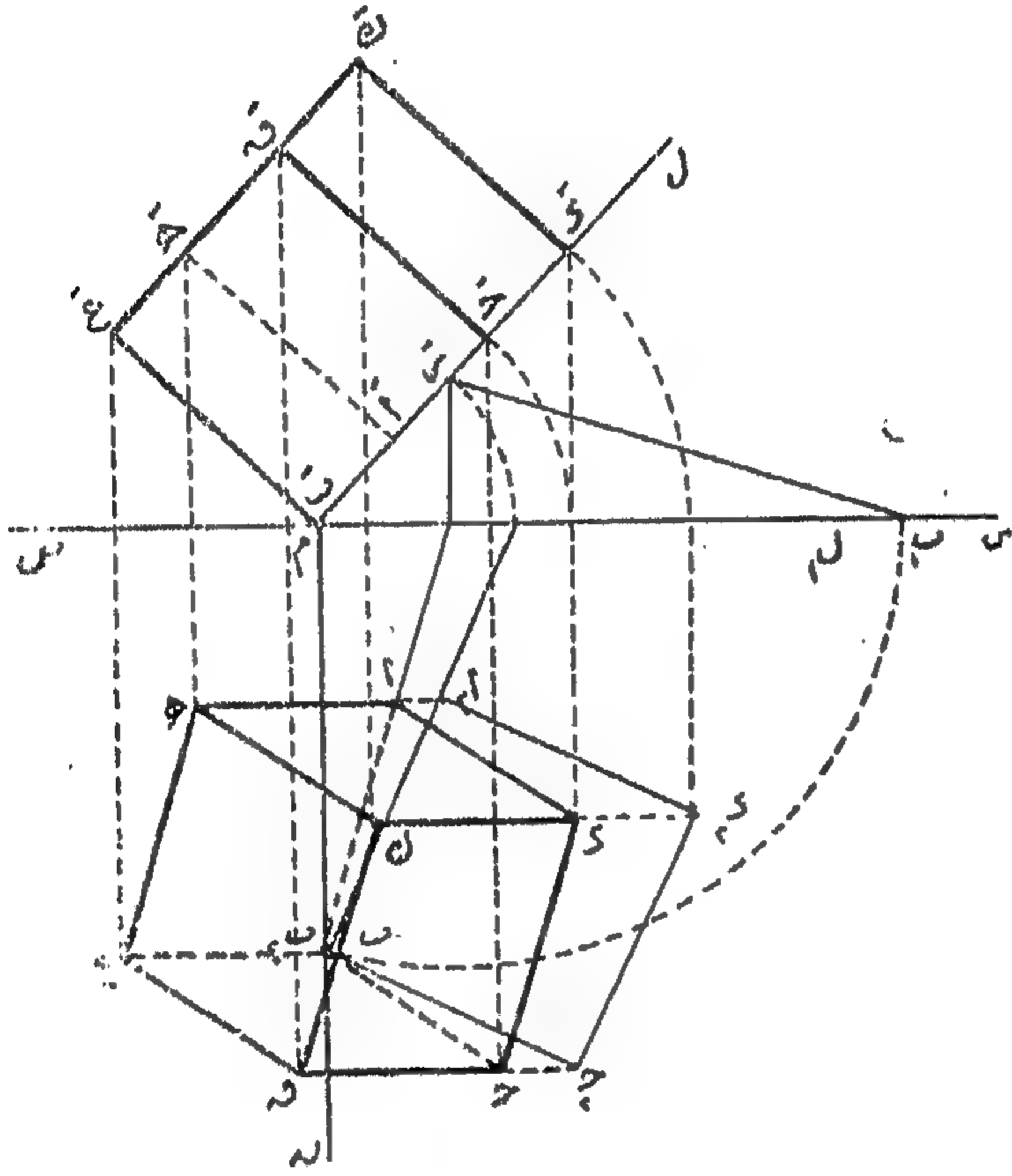
يتبع في حل هذه المسألة نفس الطريقة السابقة بتعيين مستوى السطح  $h$  م  $h$   
 أولا شكل ( ٢٢٣ ) ثم مسقطي خطين  $h$  و  $h$  ميلان بزاويتي  $h$  و  $h$  على احد  
 مستويي المسقط على التوالي ويتقاطعان في نقطة واحدة ولتكن هذه النقطة على الاثر  
 الرأسى للمستوى مثل  $h$  بعد ذلك يدار المستوى مع الخطين  $h$  و  $h$  ويرسم عليهما  
 الشكل وليكن الشكل الرباعي  $h$   $h$   $h$   $h$  بابعاده الحقيقية ثم نرجع المستوى  
 مع الشكل الى وضعه الاصلى قبل الدوران فينتج المسقطان  $h$   $h$  و  $h$   $h$   
 للشكل وهو المطلوب



.. (1947) - 52

مسألة ٥٦ — تعيين مسقطي جسم مفشوري بمعلومية ميل وجه من أوجهه وميل أحد أضلاع ذلك الوجه

المفروضة : — مسقطي مكعب معلوم أبعاد أحد أوجهه المربعة ومعلوم ميل أحد أضلاع هذا الوجه  $AB$  على المستوى الأفقي ومعلوم ميل هذا الوجه على المستوى الأفقي شكل (٢٢٤)



شكل (٢٢٤)

العمل : — نعين مستوى الوجه المعلوم ميله وإيكن  $LM$  ثم نعين مسقطي خط في ذلك المستوى يميل بزاوية ميل  $AB$  مثل  $LM$  ثم نعين وضع الخط  $LM$  بعد انطباق المستوى  $LM$  وإيكن  $LM$  ثم نأخذ  $LM$  على ذلك الخط بحيث يكون  $LM$  مساوياً لأحد أضلاع وجه المكعب ونرسم عليه المربع  $ABCD$  ثم نرجع المستوى  $LM$  ومعه الوجه  $ABCD$  ونأتي بمسقطي ذلك الوجه  $ABCD$  و  $LM$  من  $ABCD$  ونرسم أعمدة على الأثر الرأسى  $LM$  ونأخذ



على كل منها مسافات متساوية وتساوى ارتفاع المكعب مثل  $أ ه و س ع و ح و د$   
 $و ز ك$  ونصل  $ه ع و ز ك$  ينتج المسقط الرأسى للوجه المقابل للوجه  $ا ب ح و د$   
وينتج المسقط الرأسى للمكعب وهو  $ا ب ح و د ه ع و ز ك$  ومنه يمكن إيجاد المسقط  
الافقى للمكعب وهو  $ا ب ح و د ه ع و ز ك$  وهو المطلوب

مسألة ٥٧ - تعيين مسقطى جسم منشورى بمعلومية ميل خطين متفرقين

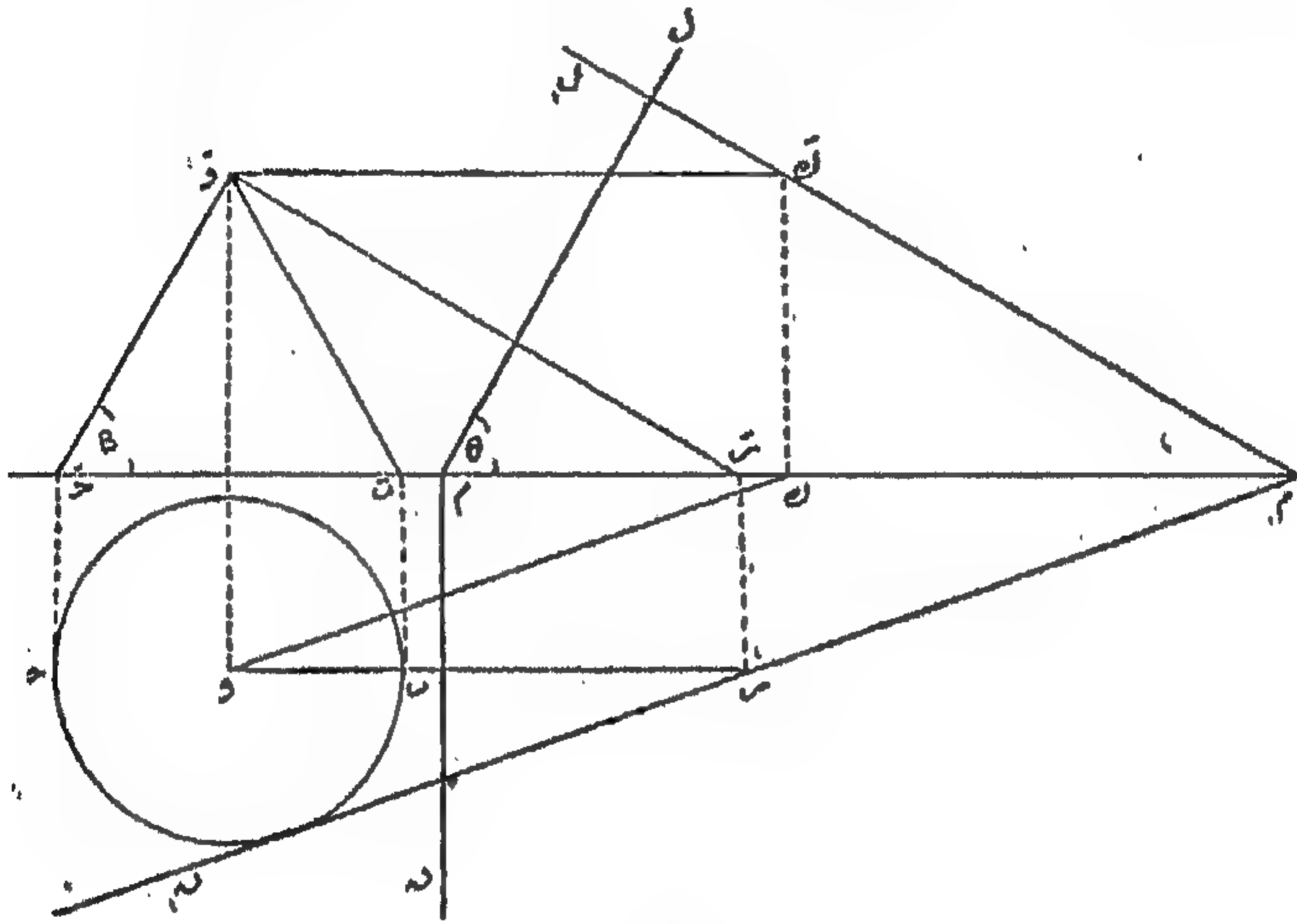
فى وجهيه الوجهين

العمل - نعين المستوى المحتوى على الخطين المتقاطعين بمعلومية ميلهما ثم  
ندير هذا المستوى ومعه الخطين المذكورين الى ان ينطبق على احد مستويى المسقط  
ثم نكمل وجه الجسم المحتوى على هذين الخطين كما فى شكل ( ٢٢٣ ) ونجرى العمل  
تماما كما فى المسألة السابقة شكل ( ٢٢٤ )

مسألة ٥٨ - تعيين مسقطى جسم منشورى محتوى على وجهين متعامدين  
على بعضهما ولهما الوجهان يميزان بزوايتين مختلفتين على امر مستويى  
المسقط

العمل : ليكن الوجهان المتعامدان على بعضهما هما الوجهان  $ا ب$  و  $ا ج$  ومتقاطعان  
فى خط مستقيم فنعين اولا مستوى الوجه  $ا$  ثم نعين مستويا آخر عموديا على مستوى  
الوجه  $ا$  ويميل بالزاوية المعلومة على المستوى الافقى ومتى عينا كل من مستويى الوجهين  
المتقاطعين نعين خط تقاطعهما ثم ندير كل من المستويين على حده ومعه خط التقاطع  
فعند دوران المستوى الذى يحتوى الوجه  $ا$  ومعه خط التقاطع الى ان ينطبق على  
المستوى الافقى مثلا نكمل على هذا الخط الوجه  $ا$  بابعاده الحقيقة ثم نرجع المستوى  
ومعه الوجه  $ا$  ثانيا الى اصله فيتمين مسقطا الوجه  $ا$  وب نفس الطريقة . وهى دوران  
المستوى الثانى ومعه خط التقاطع يمكن تعيين مسقطى الوجه  $ب$  مع ملاحظة انه يجب  
ان يكون خط تقاطع الوجهين واحدا فى كلا المستويين وبعد ذلك يمكن تعيين باقى مسقطى  
الجسم . بقى علينا ان نشرح كيفية تعيين مستوى متعامد على مستوى عمودى  
معلوم ويميل الاول بزاوية معلومة على احد مستويى المسقط وذلك كما فى المسألة ٥٩

مسألة ٥٩ — طريقة تعيين مستوى متعامد على مستوى عمودي معلوم  
 ويميل المستوى الاول بزاوية معلومة على آخر مستويي المسقط  
 المفروصه :- المستوى لـ م به يميل أثره الرأسى بزاوية  $\theta$  مع المستوى  
 الافقى وأثره الافقى عمودى على المستوى الرأسى والمطلوب تعيين مستوى آخر  
 عمودى على المستوى لـ م به ويميل بزاوية  $\alpha$  مع المستوى الافقى



(شكل ٢٢٥)

العمل :- نعين أولا المستوى لـ م به وفيه لـ م الاثر الرأسى يميل بالزاوية  
 $\theta$  على خط الارض و م به أثره الافقى عمودى على خط الارض ( شكل ٢٢٥ )  
 ثم ننتخب أى نقطة فى الفراغ مثل و وليكن مسقطها و و ومن و نرسم مسقط  
 رأسى لمخروط يميل رأسه بالزاوية  $\alpha$  مع خط الارض ومنطبقا بقاعدته على المستوى  
 الافقى ونرسم من و المسقط الافقى لها دائرة وهى المسقط الافقى للمخروط شكل (٢٢٥)  
 فاذا رسمنا من و عمودا على الاثر الرأسى لـ م مثل العمود و و ممددناه ليقابل  
 خط الارض فى و لكان و و مسقط رأسى لخط عمودى على المستوى لـ م به مسقطه  
 الافقى و و عموديا على الاثر الافقى لـ م به من و  
 وحيث أن هذا المستقيم و و عمودا على المستوى لـ م به فيكون موجودا فى

المستوى المطلوب وتكون نقطة  $r$  على أثره الأفقي ولا بد أن المستوى المطلوب يكون مماسا للمخروط  $و$  فإذا رسمنا من  $r$  مماسا للمستقط الأفقي للمخروط مثل  $هـ$ ، لكان  $هـ$  هو الأثر الأفقي للمستوى المطلوب ويمكن إيجاد الأثر الرأسى برسم خطا موازيا للمستقيم  $هـ$  من النقطة  $و$  ونمده حتى يقابل خط الأرض فى  $ك$  فيكون  $و ك$  هو مستقط أفقى لخط أفقى فى المستوى المطلوب فإذا اقتنا من  $ك$  عمودا على خط الأرض ليقابل الخط الأفقى المرسوم من  $و$  فى  $ل$  لكانت  $ك$  موجودة على الأثر الرأسى للمستوى المطلوب لأنها الأثر الرأسى للخط الأفقى  $و ك$  فإذا رسمنا من  $ك$  خطا موازيا للخط  $هـ و$  مثل  $ك ل$  يكون  $ك ل$  هو الأثر الرأسى للمستوى المطلوب وهو المطلوب



## تمهيدات ( ٨ )

على مساقط الاسطح والاجسام في أحوال خاصة متنوعة

(١) ارسم مسقطي مثلث متساوي الاضلاع طول أحد أضلاعه ٥ سم عندما يميل مستوييه بزاوية  $45^\circ$  ويميل أحد أضلاعه بزاوية  $30^\circ$  مع الأفقى واحدى رؤوسه موجودة على المستوى الأفقى

(٢) ارسم مسقطي مربع طول ضلعه ٥ سم بحيث يميل مستوى المربع  $45^\circ$  مع الأفقى و  $60^\circ$  مع الرأسى ويميل أحد قطري المربع بزاوية  $30^\circ$  مع المستوى الأفقى  
(٣) الاثر الرأسى لمستوي يميل بزاوية  $45^\circ$  مع خط الارض وأثره الأفقى يميل بزاوية  $50^\circ$  مع خط الارض ارسم مسقطي سدس في هذا المستوى بحيث يميل أحد أضلاع ذلك السدس بزاوية  $30^\circ$  مع المستوى الأفقى

(٤) ا ب ح مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٥ سم ونقطة ا منه على المستوى الأفقى ونقطة ب تعلو بمقدار ٢ سم و ح تعلو بمقدار ٣ سم عن المستوى الأفقى ارسم مسقطي ذلك المثلث على خط أرض مواز الى ا ب  
(٥) ارسم مسقطي مربع ا ب ح د طول ضلعه ٤ سم اذا كان مركزه يعلو بمقدار ٤ سم و ونقطتي ا و ب منه تعلوان بمقدار ٣ سم و د راسم على التوالى عن المستوى الأفقى

(٦) ارسم مسقطي هرم خماسي قائم قاعدته مخمس منتظم طول ضلعه ٢ سم بحيث يميل قاعدته بالزاويتين  $55^\circ$  و  $60^\circ$  مع الأفقى والرأسى على التوالى ويميل أحد اضلاع قاعدته بزاوية  $30^\circ$  مع الأفقى وارتفاعه ٥ سم

(٧) منشور قائم طوله ٦ سم وكل من قاعدتيه المتوازييتين سدس منتظم طول ضلعه ٢ سم و ا ب هو ضلع من أضلاع قاعدته و ب ه هو أحد أحرف أوجهه الجانبية ارسم مسقطي ذلك المنشور بفرض أن الثلاث نقط ا و ب و ه تعلو بمقدار ٤ و ٢ و ٥ سم عن المستوى الأفقى على التوالى

# الفصل التاسع

## قطاعات الاجسام

مقدمة :

٣٠ — الغرض من هذا الباب هو معرفة الطرق العمياء اللازمة لبيان انواع سطوح الاجسام المستعملة في الأعمال الفنية وكيفية قطع تلك الاجسام واظهار تفاصيلها الداخلة بمساعدة القواعد الاساسية المذكورة في البنود السابقة . وحيث ان الاجسام الاكثر استعمالا في الأعمال الفنية هي الاجسام الهندسية فلنقتصر على شرح التعاريف والقواعد الخاصة بها .

تعريف :

السطح الهندسي : هو المحل الهندسي لسائر الأوضاع التي يسفلها خط يتحرك في الفراغ بشروط معينة كاتكائه على خط آخر وتوازيه لنفسه أو مروره بنقطة معينة أو دورانها حول مستقيم ثابت

والخط المتحرك هنا يسمى براسم السطح المتولد عنه والخط المتسكيء عليه يسمى بداله والمستقيم الثابت يسمى بمحوره .

فاذا كان الراسم خطا مستقيما والدال خطا مستقيما وكان كل من الراسم والدال في مستو واحد سمي السطح المتولد عنهما سطحا مستويا

واذا كان الراسم خطا مستقيما والدال خطا منكسرا ومستويا وليس في مستوى واحد مع الراسم سمي السطح المتولد عنهما سطحا منكسرا

واذا كان كل من الراسم والدال خطا منحنيا وليس في مستو واحد سمي السطح المتولد عنهما سطحا منحنيا



وإذا كان الراسم خطا مستقيما والدال منحنيا وليس في مستوى الراسم سمي  
السطح المتولد عنهما سطحا مركبا .

اما اذا دار الراسم دورة كاملة حول محور ثابت مع المحافظة على ابعاد نقطة  
عن المحور المذكور سمي السطح المتولد عنه سطحا متحركا مهما كان نوع الراسم  
بشرط عدم تعامده على محوره . ويتميز هذا السطح بانه اذا قطع بمستوى عمودى على  
محوره كان المقطع محيط دائرة ومثال ذلك السطح الاسطوانى والمخروطى والكروى  
ومجسم القطع الناقص أو الزائد التحدى والسطح الحلقي .

ومن هذا يتضح أن السطوح الهندسية : —

اما ان تكون مستوية وهذه لا تشغل حيزا من الفراغ

واما أن تكون منكسرة وهي التي اذا احاطت حيزا من الفراغ وملئ هذا  
الحيز بأكمله بأي مادة تكونت اجسام منشورية او هرمية

واما ان تكون اسطح منحنية أو مركبة ويدخل ضمنها الأسطح التحركية  
وهي التي اذا احاطت حيزا من الفراغ وملئ هذا الحيز بأكمله بأي مادة تكونت  
اجسام اسطوانية او مخروطية او كروية او مجسمات القطع الناقص او الزائد التحركي  
فتسمى الاسطح والاجسام بحسب أشكالها وعند الكلام على الاجسام واسطحها  
قد يطلق في الغالب على كل من الجسم أو سطحه اسم واحد فمثلا كلمة كرة واسطوانة  
يقصد بها اما جسم او سطح الكرة او الاسطوانة وعند الكلام على تقاطع  
اسطوانتين ببعضهما فقد يقصد به الكلام على شكل منحنى تقاطع سطحى تلك  
الاسطوانتين فقط لا جسميهما .

بند ٣١ — القطاعات :

قد يتعذر في احوال كثيرة معرفة تفاصيل وافية عن تكوين الاجسام من  
الداخل كاجزاء القطع الميكانيكية او المعمارية معلومية مساقط اسطحها من الخارج فقط  
ولذا يكون من الضروري اظهار اشكالها من الداخل فنتصور قطع تلك الاجسام

بمستويات عمودية او اختيارية الى عدة اجزاء عند مواضع معينة فيها واسقاط تلك الاجزاء كل على حده .

وقد يقصد من قطع الجسم أحيانا زيادة ايضاح ابعاده أو سهولة كتابتها على الرسم اذا كان ذلك الجسم بسيطا ولو ان ذلك ليس ضروريا لمعرفة تكوينه من الداخل فاذا كان الجزء المقطوع من الجسم تحت أو خلف المستوى القاطع فان مسقطه على احد مستوي المسقط يسمى بالقطاع الأفقي او القطاع الرأسى لذلك الجزء على التوالى وقد يطلق على كليهما كلمة قطاع فقط في الاشكال المعمارية والميكانيكية ويميز مسقط القطاع في الرسومات الهندسية بطرق مختلفة أهمها تهشير بخطوط وتورية خفيفة على ابعاد متساوية وقريبة من بعضها

واذا اريد بيان الشكل الحقيقي للقطاع فلا بد من اسقاطه على مستوي يوازي المستوى القاطع . أو بقاءه على نفس المستوى القاطع ثم دوران هذا المستوى حتى ينطبق على احد مستوي المسقط

فاذا كان المستوى القاطع متعامدا على كل من مستوي المسقط فيكفي اسقاط القطاع على المستوى الجانبي ودورانه حتى ينطبق على احد مستوي المسقط وهذا يبين شكله الحقيقي

واذا كان المستوى القاطع عموديا على المستوى الرأسى وموازيا للأفقى فيكفي اسقاطه على المستوى الأفقى لبيان حقيقة شكله

واذا كان المستوى القاطع عموديا على الأفقى وموازيا للرأسى فيكفي اسقاطه على المستوى الرأسى لبيان شكله الحقيقي

واذا كان المستوى القاطع عموديا على الرأسى ومائلا على الأفقى يسقط القطاع على مستوي يوازي المستوى القاطع أو على نفس المستوى القاطع اى على خط ارض يوازي الاثر الرأسى للمستوى القاطع أو منطبقا عليه فيظهر بشكله الحقيقي

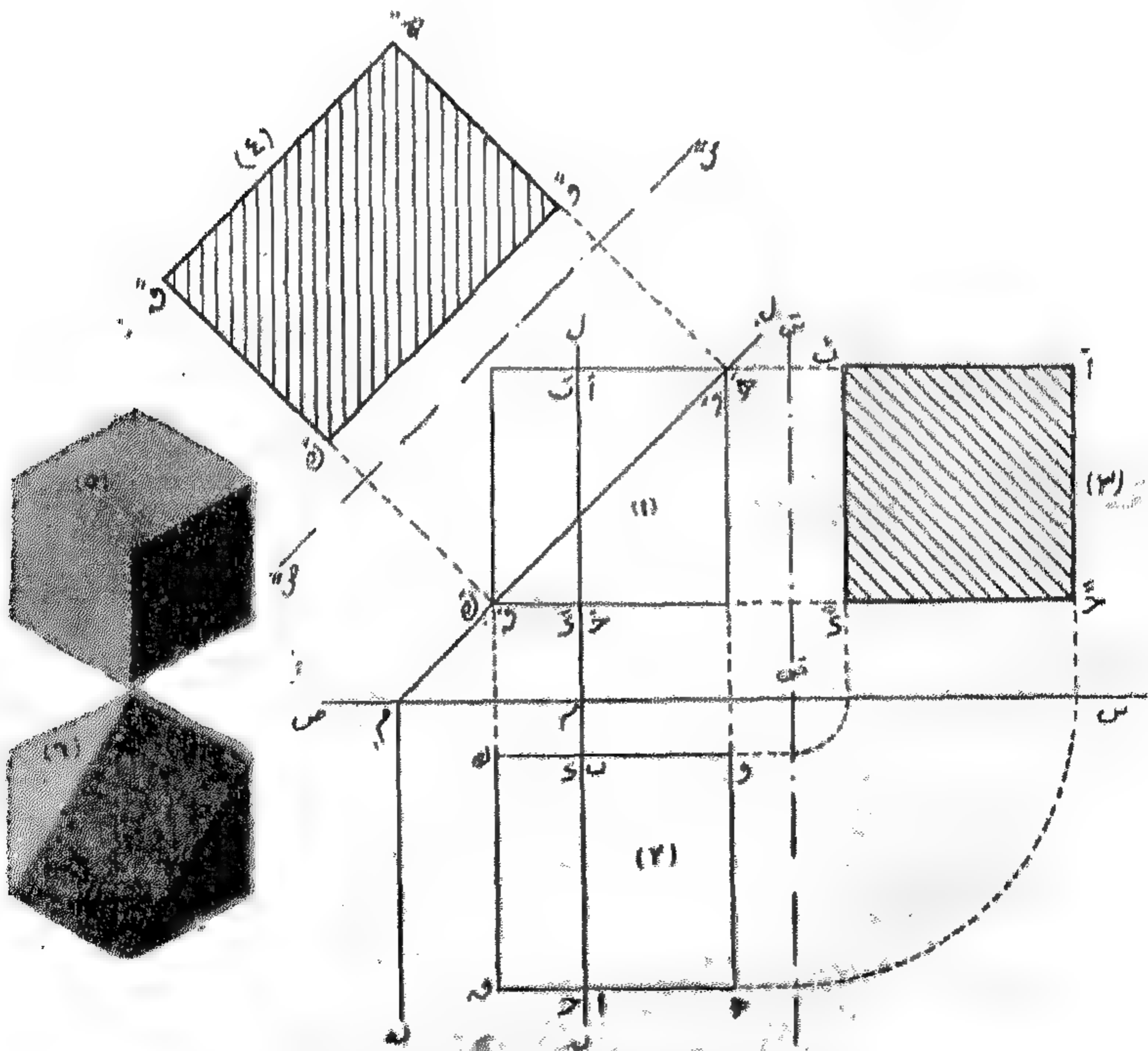
واذا كان المستوى القاطع عموديا على الأفقى ومائلا على الرأسى يسقط القطاع على مستوي يوازي الاثر الأفقى للمستوى القاطع أو منطبقا عليه فيظهر بابعاده الحقيقية اما اذا كان المستوى القاطع اختياريا فليبيان شكل القطاع الحقيقي يسقط القطاع

أولا على كل من مستويي المسقط ويؤتى بمسقطيه الرأسي والافقي وبعد هذا تتحول المسألة الى ايجاد الشكل الحقيقي لسطح معلوم مسقطيه والمستوى المحتوى عليه فيدار المستوى القاطع مع القاطع حول احد أثريه الى ان ينطبق على احد مستويي المسقط كما سبق الكلام عليه في الفصل السابق وسنشرح فيما يلي طريقة قطع الأجسام وكيفية ايجاد مساقط قطاعاتها والأشكال الحقيقية لتلك القطاعات وسنبداً أولاً الاجسام ذات الاسطح المستوية وهي المنشورية والهرمية ثم الاجسام التحركية وهي المخروطية والاسطوانية والكروية فالاجسام المركبة

بئر ٣٢ — قطاعات الاجسام المنشورية والهرمية :

المكعب : —

شكل (٢٢٧) يبين المسقطين الرأسي (١) والافقي (٢) لمكعب وقد قطع هذا المكعب بمستويين : —



(شكل ٢٢٧)



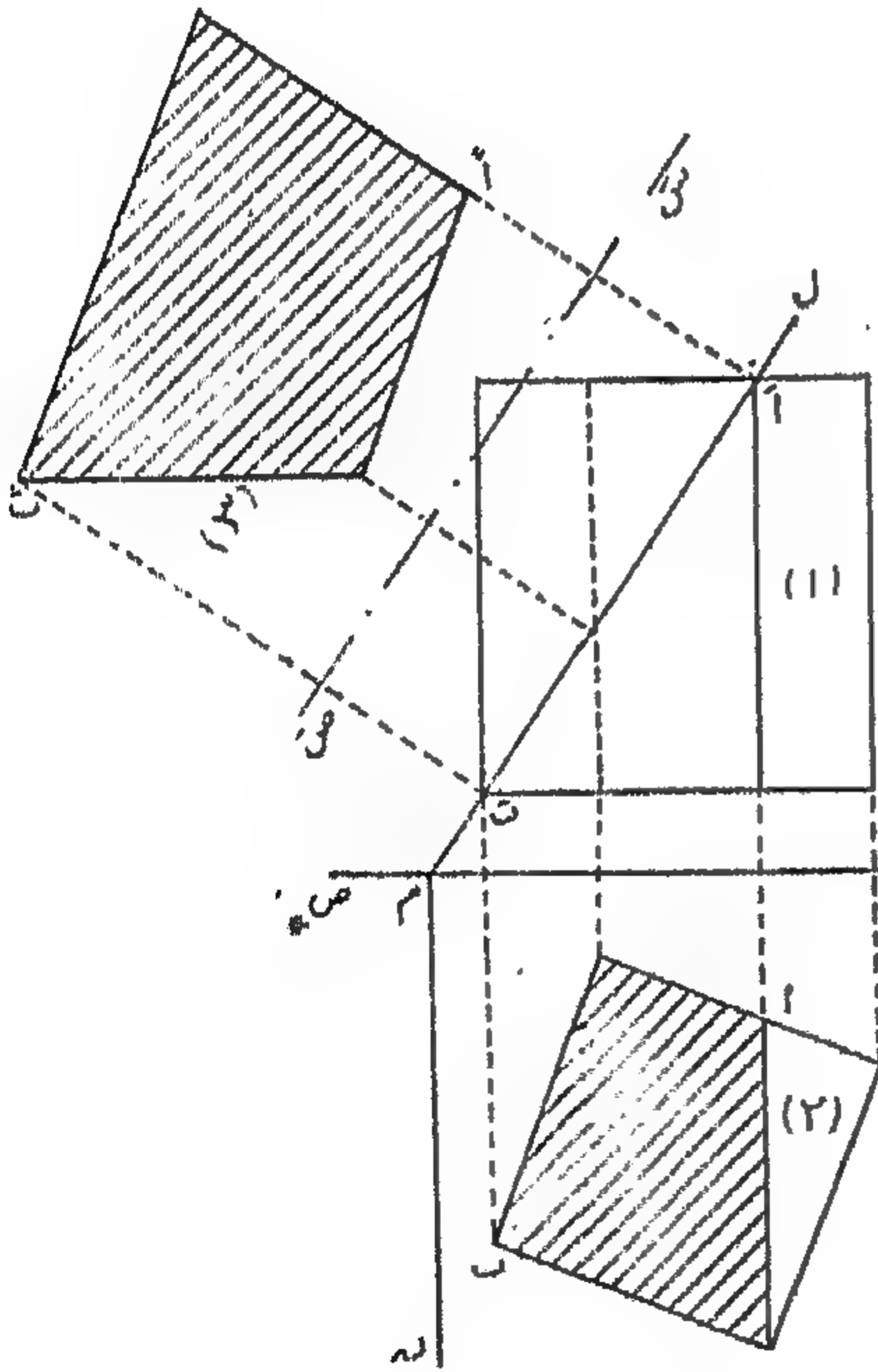


يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لمكعب فى وضع بحيث ان اوجهه الجانبية تميل بزاوية ٤٥ مع الرأسى . وقد قطع هذا المكعب : —

أولاً — بمستوى عمودى على الرأسى ومائل الى الافقى ل م ن ويمر بثلاث رؤوس من رؤوس المكعب وهي ب و ح و د فكان المسقط الرأسى للقطاع هو ب م د والافقى له هو ب م د ثم ادرنا المستوى القاطع ومعه القطاع حتى انطبق على المستوى الافقى فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٣) وهو المثلث ب م د والشكل (٥) يبين منظورا للمكعب وهو مقطوع فى هذه الحالة

ثانياً — بمستوى عمودى ل م ن ويمر بمركز المكعب فكان المسقط الرأسى للقطاع هو الخط آ ه والافقى له وهو الشكل السداسى ا ه ثم اسقط القطاع على مستوى س س يوازى المستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٤) وهو المسدس آ ه والمنظور (٦) يبين المكعب وهو مقطوع فى هذه الحالة

#### المنشور :-



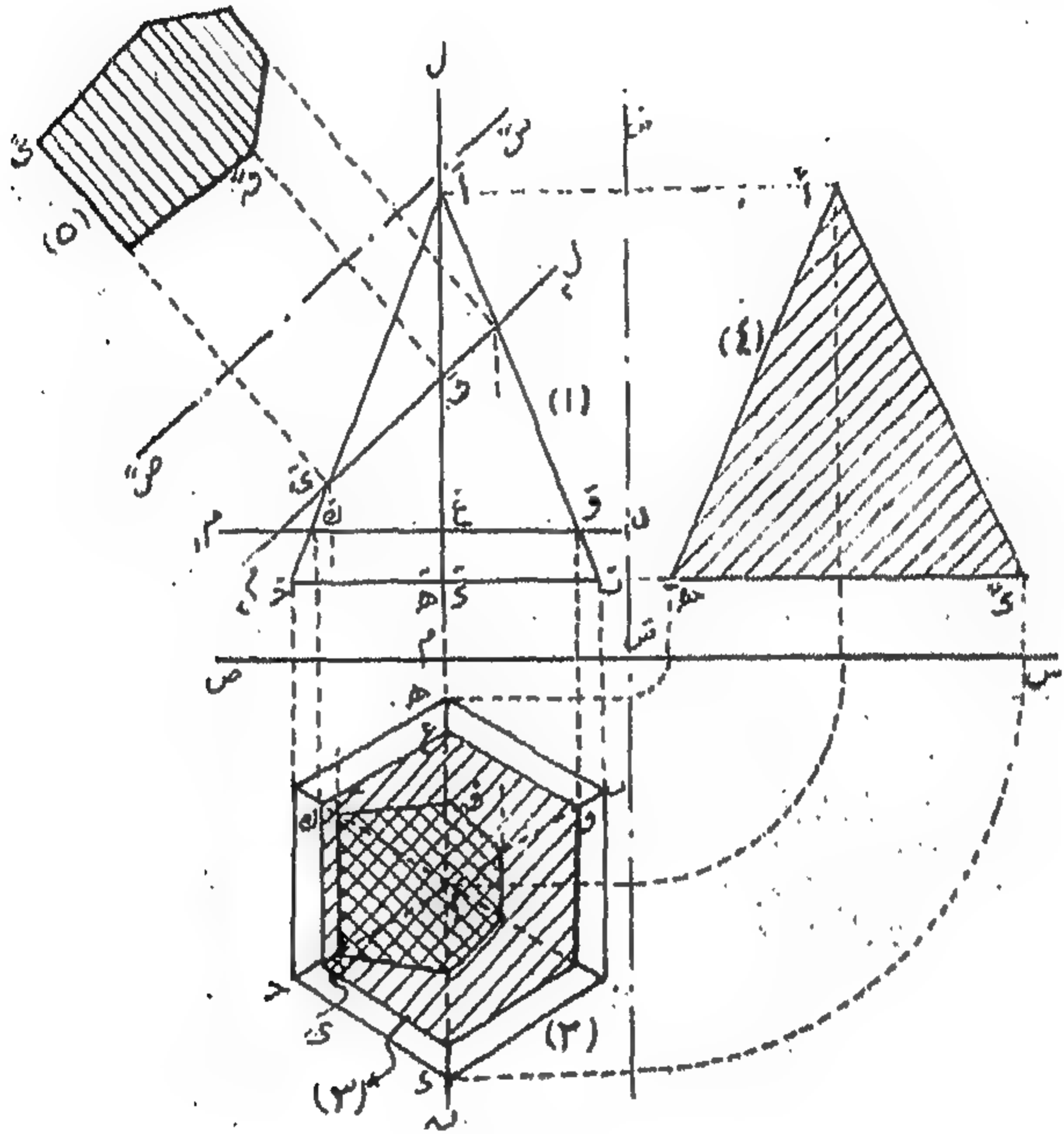
شكل (٢٢٩)

شكل (٢٢٩) يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) للمنشور رباعى قائم قاعدته موازيتان للمستوى الافقى وأوجهه الجانبية مائلة على المستوى الرأسى وقد قطع ذلك المنشور بمستوى عمودى ل م ن فكان المسقط الرأسى للقطاع هو الخط آ ب والافقى له هو الشكل الرباعى ا ب م ن ثم اسقط القطاع على مستوى س س يوازى المستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٣) وهو شبه المنحرف آ ب



## الهرم:

شكل (٢٣٠) يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لهرم سداسى قائم  
قاعدته موازية للمستوى الافقى وقطر من اقطار القاعدة عمودى على المستوى الرأسى  
وقد قطع ذلك الهرم : —



شكل (٢٣٠)

أولاً — بمستوى عمودى على خط الارض ل م ن فكان المسقط الرأسى للقطاع  
هو الخط أ د هـ والافقى له هو الخط ا هـ د ثم اسقط القطاع على المستوى الجانبي  
س م ن الموازى للمستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٤) وهو المثلث أ د هـ  
ثانياً — بمستوى افقى ل م ن فكان المسقط الرأسى للقطاع هو و ع ك والمسقط  
الافقى له هو المسدس المشروع ك (٣) وهو الشكل الحقيقى للقطاع .  
ثالثاً — بمستوى عمودى على الرأسى ومائل على الافقى ل م ن فكان المسقط  
الرأسى للقطاع واقع على الخط ل م ن والمسقط الافقى له هو الشكل السداسى المشرع  
تهشيراً مضاعفاً ن ي ثم اسقط القطاع على خط ارض س م ن مواز للمستوى القاطع  
فنتج الشكل الحقيقى للقطاع وهو الشكل السداسى ن ي فى (٥)



ثالثا — قطاع منحني قطع مكافئ. اذا كان المستوى القاطع موازيا لأحد  
رواسم المخروط ويقطع قاعدة المخروط شكل (٢٠٩) صفحة ١٣٧

رابعا — قطاع منحني قطع زائد اذا كان المستوى القاطع موازيا لراسمين  
من رواسم المخروط فيقطع سطح المخروط وامتداده من جهة الرأس في منحنيين في  
جهتين مختلفتين منها شكل (٢١٠) صفحة (١٣٨) وكل هذه القطاعات الاربعة يطلق

عليها القطاعات المخروطية

الكرة

شكل (٢٣٢) يبين

المسقطين الرأسى (١)

والافقى (٢) لكرة وقد

قطعت : —

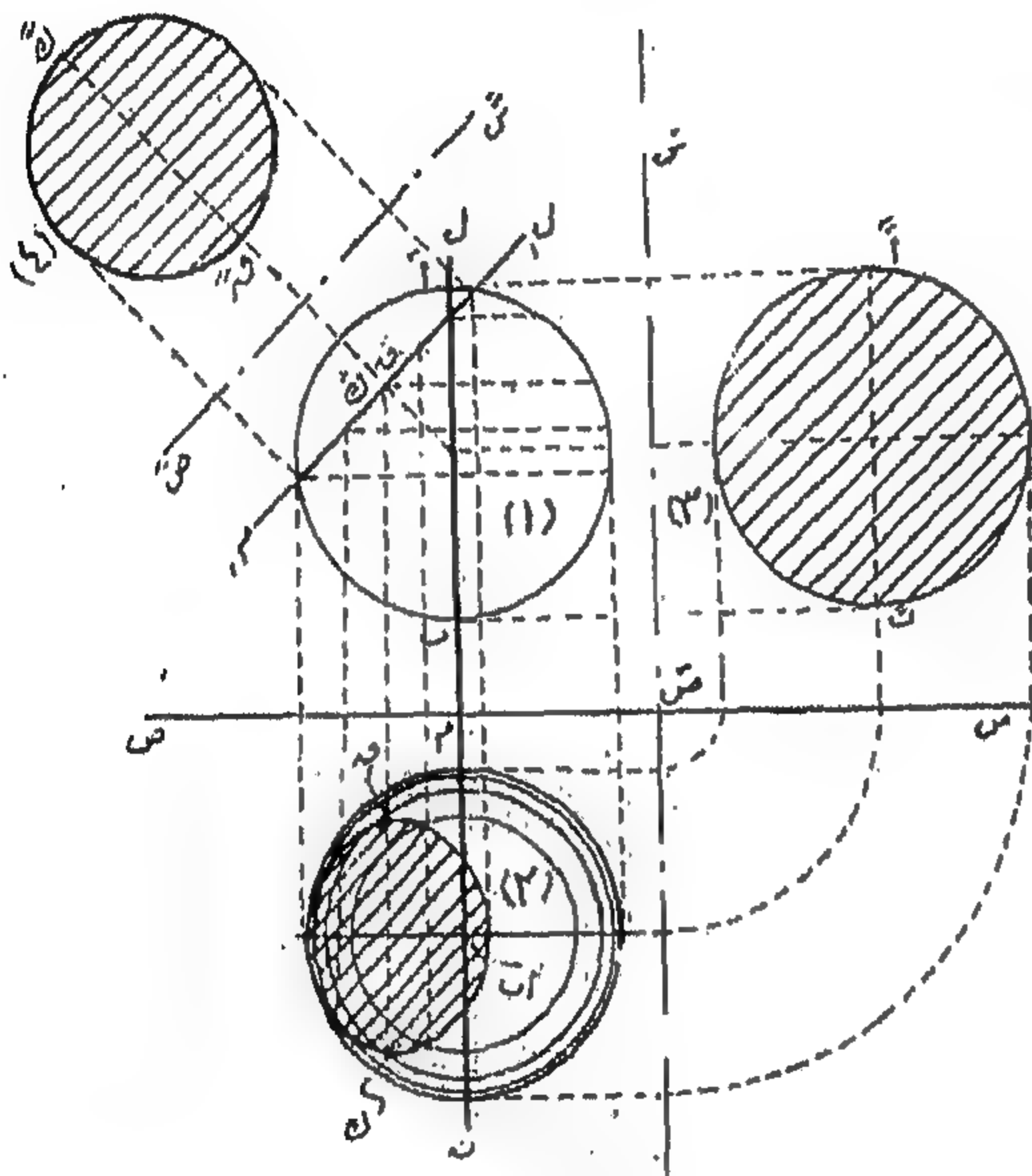
أولا — بمستوى عمودى

على خط الارض ل م ن يمر

بمركزها فكان المسقط

الرأسى الخط أ ب والافقى

الخط ا ب ثم اسقط القطاع



(شكل ٢٣٢)

على مستوي جانبي من م ن فنتج الشكل الحقيقى أ ب للقطاع وهو دائرة قطرها يساوى  
قطر الكرة وهو اكبر قطاعات الكرة

ثانيا — بمستوى عمودى على الرأسى ومائل على الأفقى ل م ن ولا يمر بمركز

الكرة فكان المسقط الرأسى هو المستقيم ل م ن والأفقى قطع ناقص ل م ن

اما نقط المسقط الافقى هذا فقد وجدت بواسطة قطع الكرة بمستويات أفقية

على ارتفاعات مختلفة فالأثرات الرأسية لتلك القطاعات تقطع الأثر الرأسى المستوى

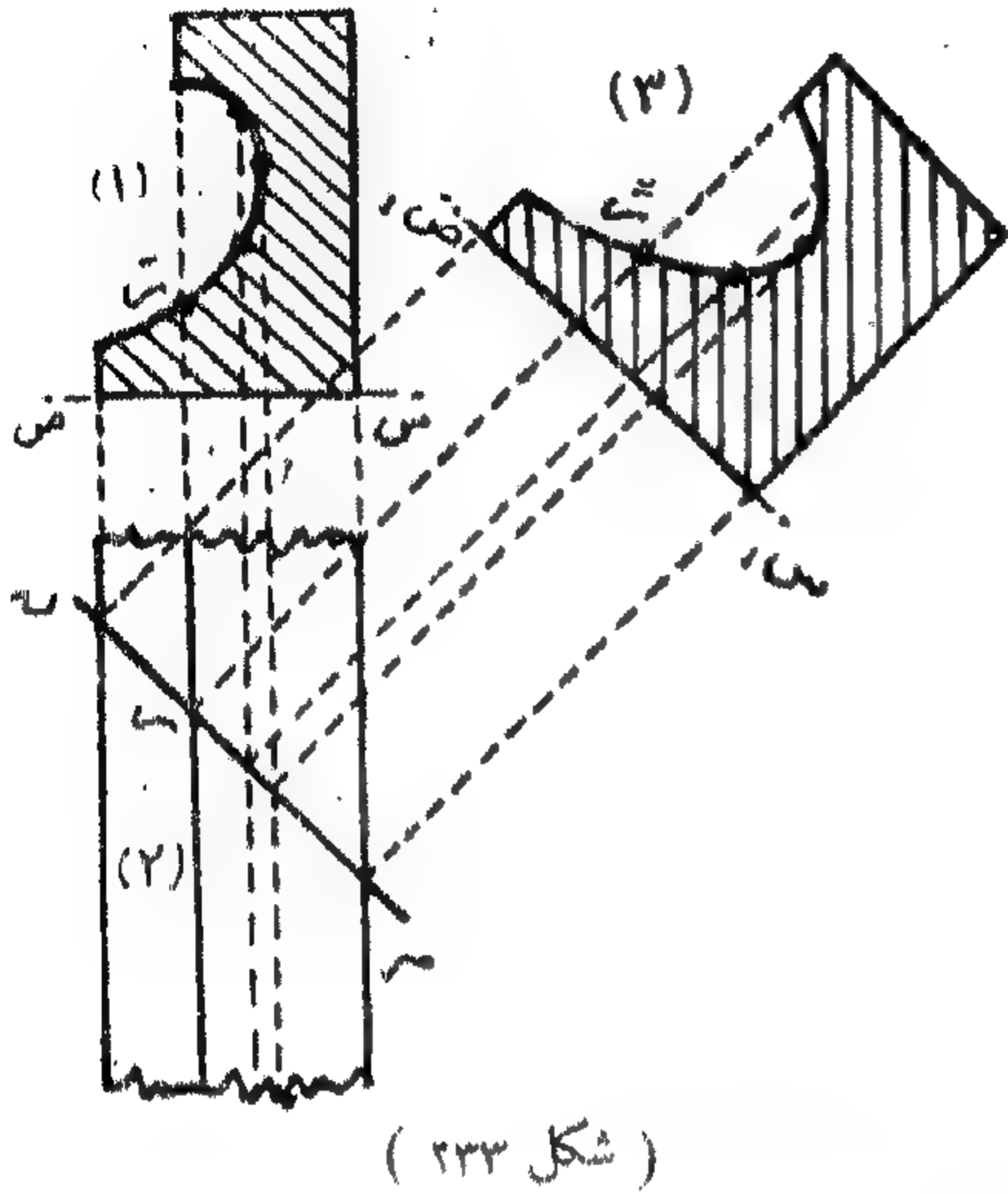
القاطع في نقط مثل ن م ل والمساقط الافقية لتلك المستويات هي دوائر ظاهرة على

المسقط الافقى للكرة فكل نقطة مثل ن م لها مسقطان أفقيان على المسقط الافقى

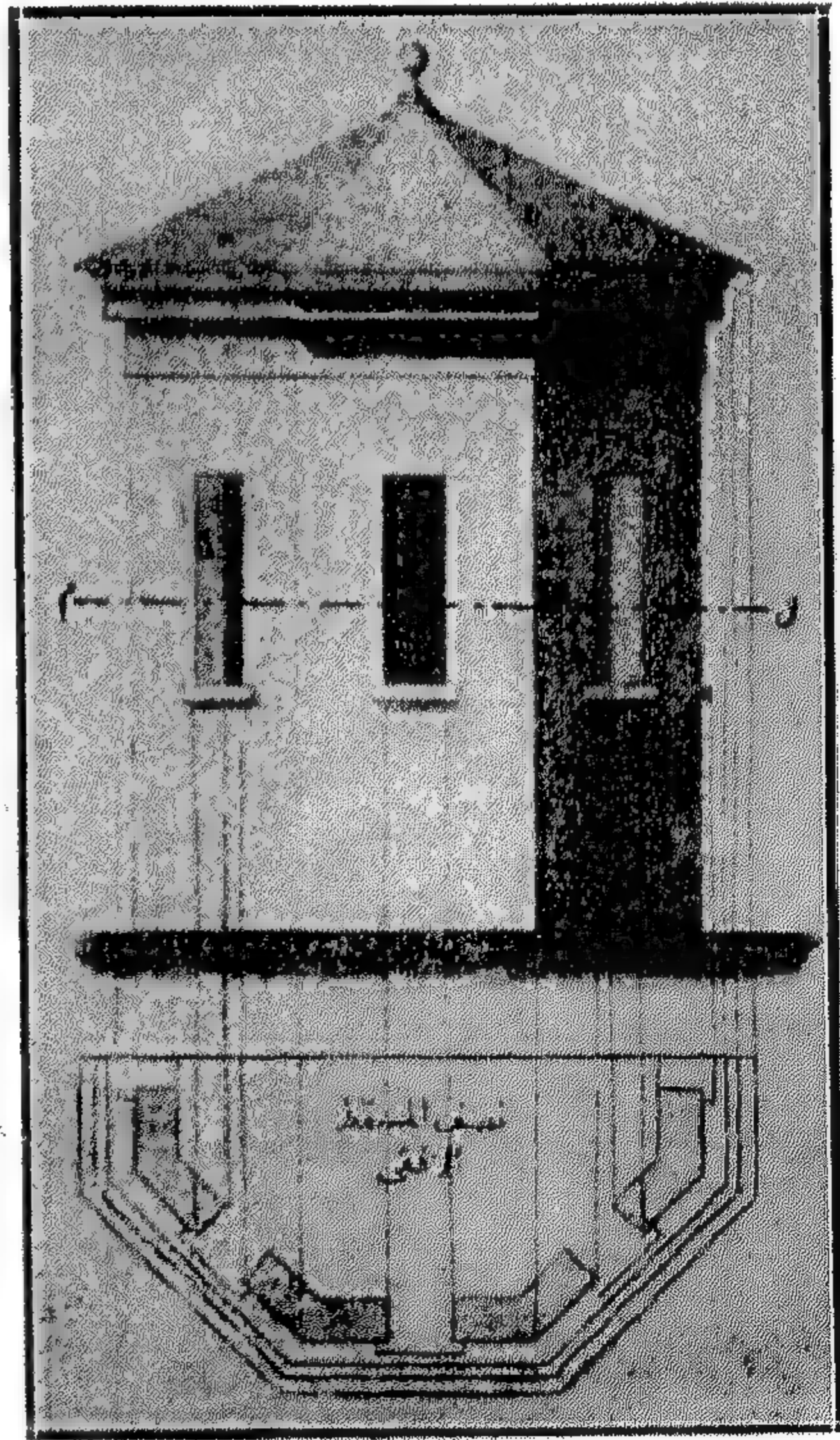
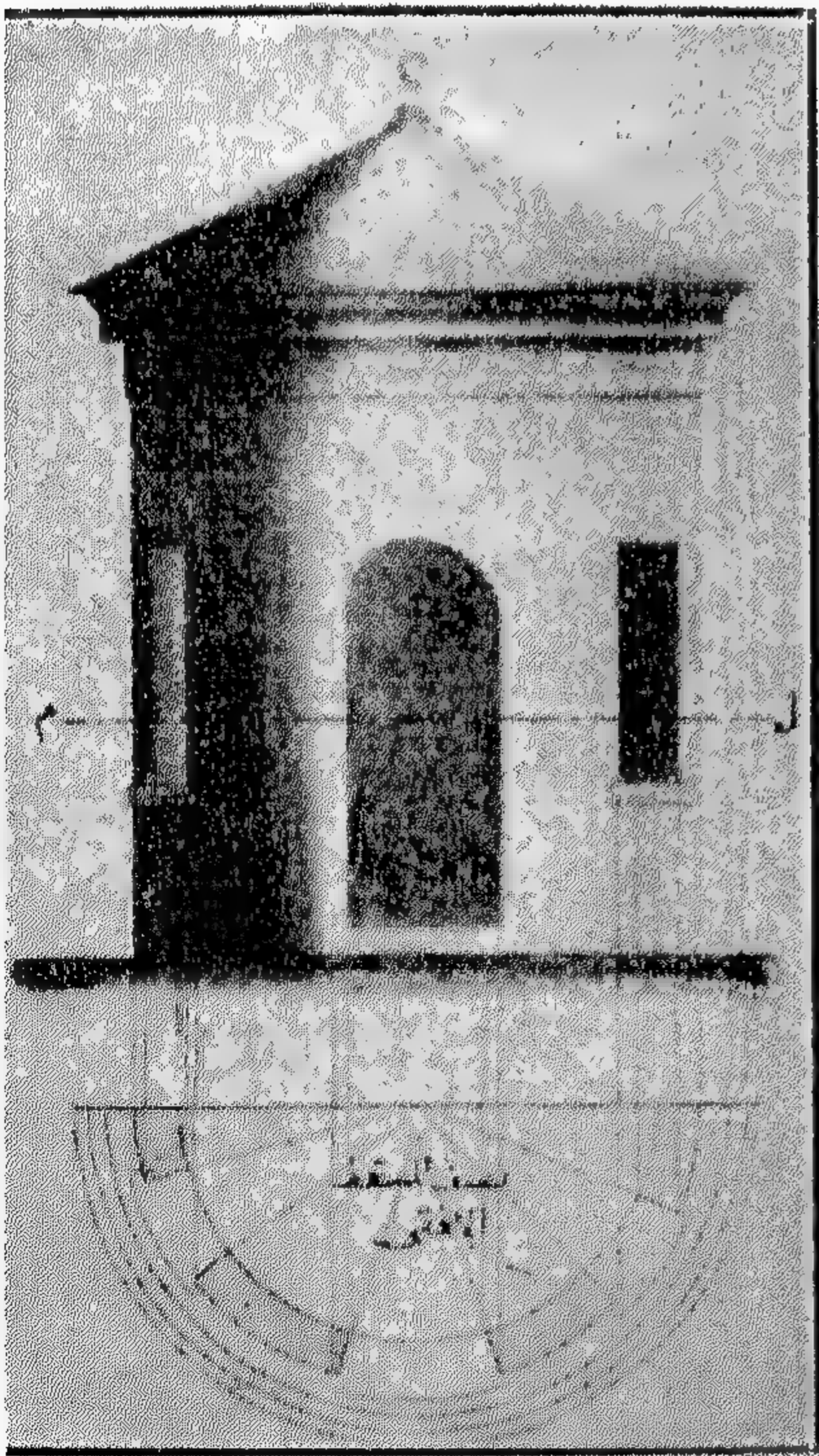
للقطاع عند ن وعلى ذلك ينتج المسقط الافقى للقطاع وهو ن م ل



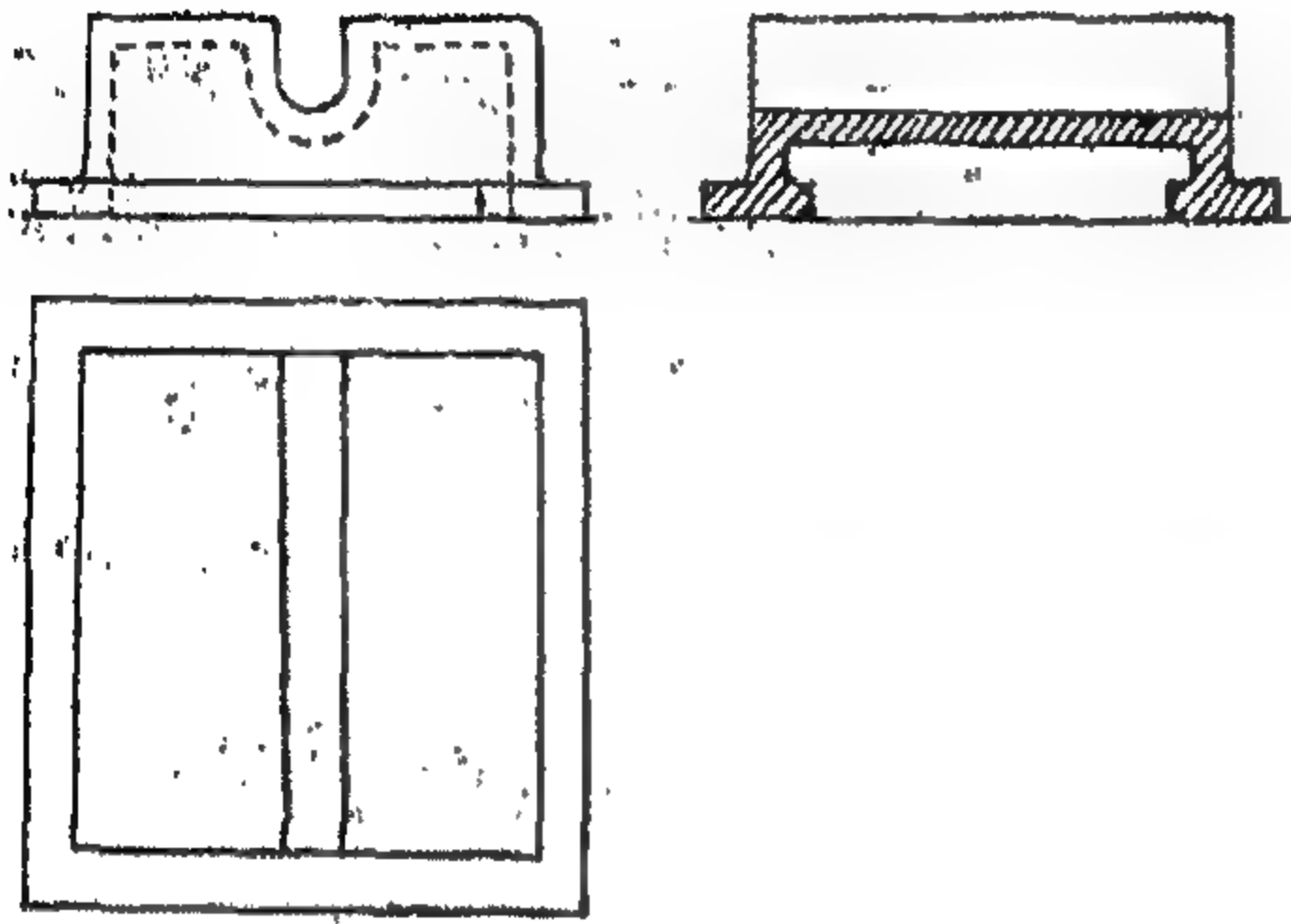
ثم اسقط القطاع على مستوي س س' يوازي ل م، فنتج الشكل الحقيقي للقطاع وهو الدائرة ن ن'.



بئر (٣٤) قطاعات الابعاد المركبة  
شكل (٢٣٣) يبين المسقط الرأسى (١)  
والافقى (٢) لقالب مستعمل كحلية في  
المباني وقد قطع بالمستوى م م' واسقط  
القطاع على س س' يوازي المستوى القطاع  
م م' وأخذت ابعاده كابعاد المسقط  
الرأسى (١) عن خط الارض س س' فنتج  
الشكل الحقيقي لقطاع القالب (٣)



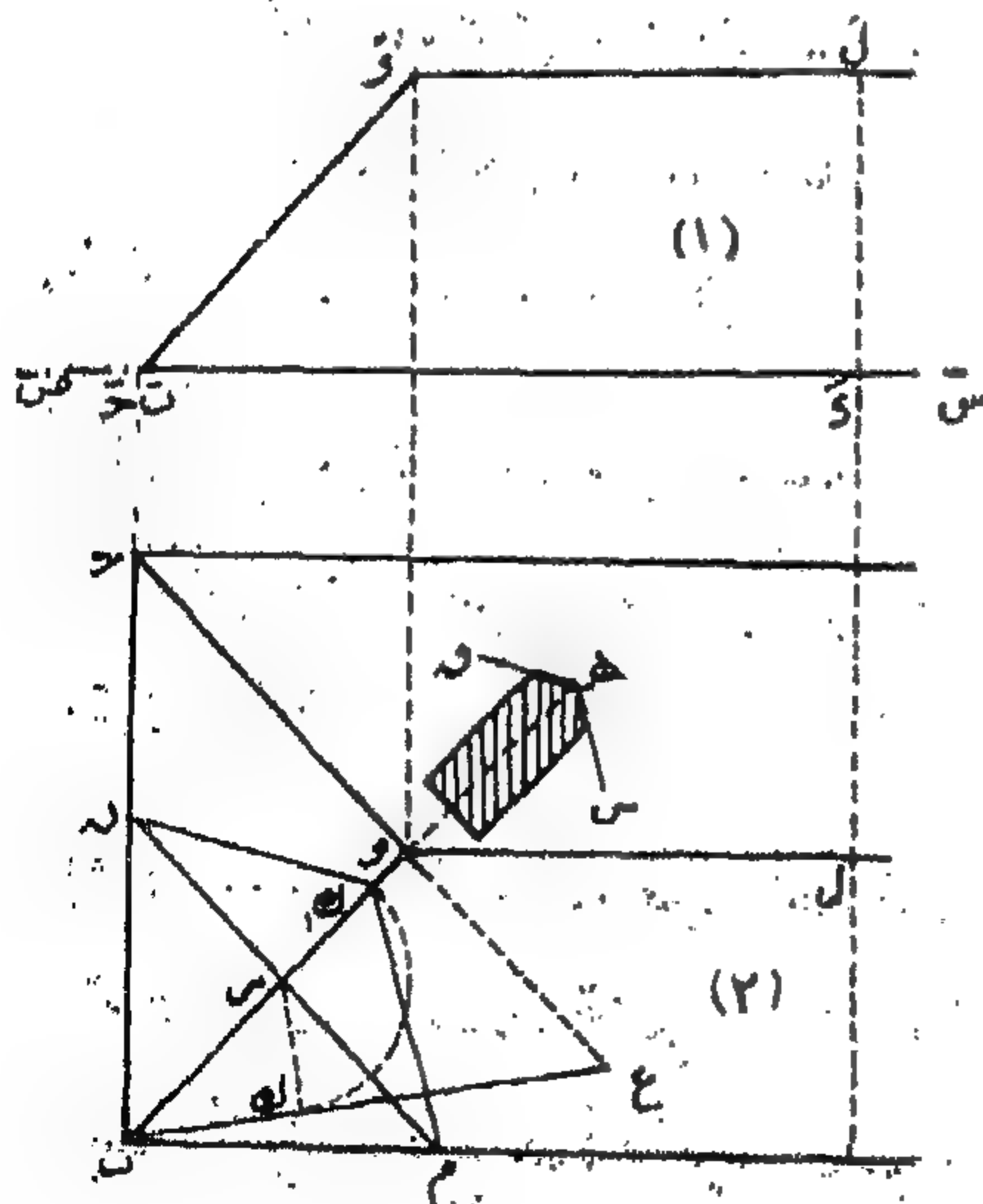
وشكل (٢٣٤) يبين المسقط الرأسى (١) ونصف المسقط الاقصى (٢) لكشك مدس مقطوع بمستواقى ل م . ( هنا قد ظللنا اوجه الكشك لسهولة تصويره )  
وشكل (٢٣٥) يبين المسقط الرأسى ونصف المسقط الاقصى كذلك لكشك دائري مقطوع بمستواقى ل م



شكل (٢٣٦)

وشكل (٢٣٦) يبين المسقط الرأسى والاقصى لصمام منزلق بسيط وهي قطعة من آلة بخارية ويبين المسقط الجانبى لقطاع فى ذلك الصمام وهو مقطوع بمستواقى عمودى على كل من مستوى المسقط وهو شكل القطاع الحقيقى

ملاحظة : فى الاشكال الثلاثة الاخيرة يظهر جليا للطالب فائدة قطع الاجسام وعمل القطاعات فهو لاظهار اسماء تلك الاجسام وسهولة وضع ابعادها على الرسم  
بئر (٣٥) المثال التالى تطبيق عملى على استعمال القطاعات فى المنشآت الخشبية :



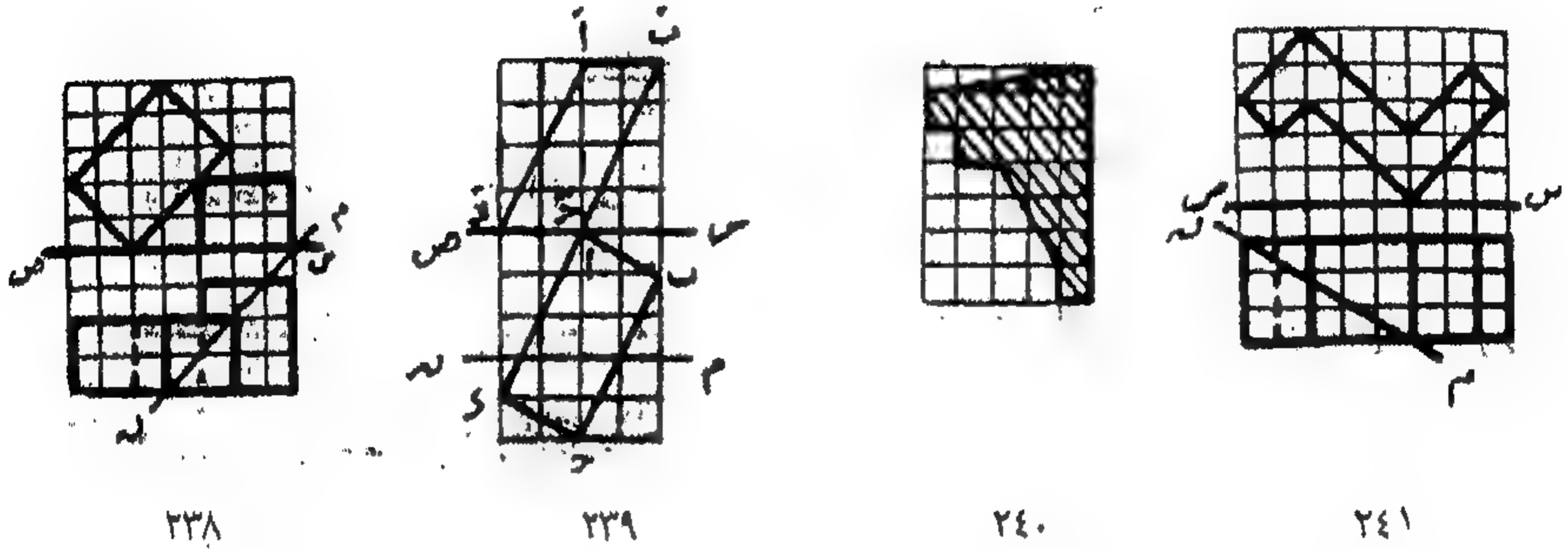
(شكل ٢٣٧)

وشكل (٢٣٧) يبين المسقط الرأسى (١) والاقصى (٢) لسقف جمالونى وفيه نقطة و و هي تلاقى ثلاث سطوح مائلة مع بعضها .  
وليسكن المطلوب زاوية ميل السطح و ب ح مع السطح ل و ب  
لذلك تقطع السطحين المذكورين بمستواقى فالخط و ب هو المسقط الاقصى لخط تقاطع السطحين والخط م ن مرسوم عمودى على خط





(٤) هرم سداسي قائم طول ضلع قاعدته ٥ سم وارتفاعه ٥ سم قطع بمستوى  
يحتوى على أحد احرف القاعدة وعموديا على الوجه المقابل لذلك الحرف  
والمطلوب رسم الشكل الحقيقي للقطاع



(٥) شكل (٢٣٩) يبين المسقطين الرأسى والافقى لآ حدة و اب حدة واحد  
الاجه الجانبية المنشور سداسى قائم و اب و حدة اضلاع فى قاعدتيه على التوالى  
ككل مسقطى المنشور المذكور و بين على المسقط الرأسى مسقط قطاع فى المنشور  
بمستوى رأسى اثره الافقى م ن

(٦) قالي حلية قطاع كل منهما كالمبين بشكل (٢٤٠) الصق على حائط رأسى  
ووضع أحدهما افقى والاخر يميل بزاوية ٣٠° مع الافقى وقد اتصلا ببعضهما عند  
وصلة والمطلوب تعيين الشكل الحقيقى للقطاع عند تلك الوصلة

(٧) مخروط قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ٥ سم قطع بمستوى عمودى يميل على  
الافقى بزاوية ٤٥° ويماسا لقاعدة المخروط والمطلوب رسم المسقط الافقى للقطاع  
وايجاد الشكل الحقيقى له



## الفصل العاشر

### في الانفرادات

بشر (٣٦) : انفراد السطح هو بسطه بإبعاده الحقيقية على سطح مستو

والسطوح من حيث الانفراد على نوعين : —

سطوح قابلة للانفراد وهي ما أمكن بسطها على السطح المستوي بدون حصول أدنى تمزيق ولا انثناء في أجزائها كما السطوح المنشورية والهرمية والاسطوانية والمخروطية وسطوح غير قابلة للانفراد ويطلق عليها السطوح الشالية وهي لا يمكن بسطها على السطح المستوي بدون حصول التمزيق والانثناء في أجزائها ومنها السطح الكروي والقبة الدائرية ولانها لا يمكن بتقسيم مثل تلك الاسطح الى قطع يمكن بالتقريب إيجاد انفراد كل قطعة منها كما سنبين بعد .

ويقصد عادة بالانفرادات بسط السطوح الجانبية الاجسام دون سواها فقد لا يدخل في ذلك انفراد قواعد تلك الاجسام وسنتكلم فيما يلي عن انفراد السطوح بأنواعها قابلة للانفراد وغير قابلة له بعد الكلام على كيفية تكوين كل منها

بشر (٣٧) : السطوح القابلة للانفراد :

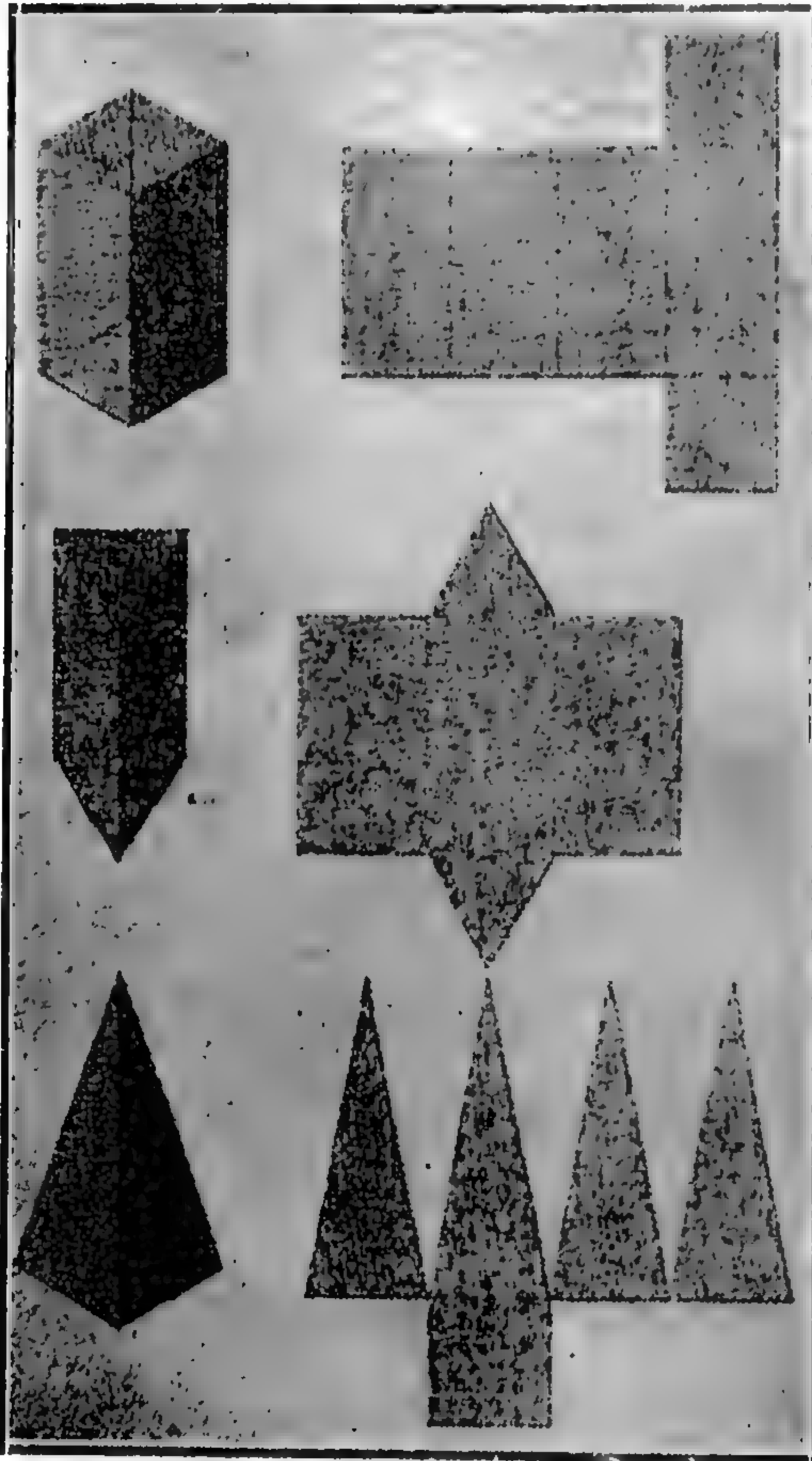
السطح المنشوري : هو نوع من السطوح المنكسرة يتولد عن تحرك الراسم المستقيم بالتوازي لنفسه حالة كونه متكثا على خط منكسر مستو غير موجود في مستويه

والاكثر استعمالا من هذا النوع في الاعمال الفنية ما كان داله مضاعفا منتظما ورأسه عمود على مستويه ويسمي بالمنشور القائم المنتظم

ولانفراد السطح المنشوري القائم يلاحظ انه بالنظر لتكون سطحه من جملة

مستطيلات متساوية في القواعد اذا كان منتظما وغير متساوية إن كان غير منتظم وارتفاع كل مستطيل منها مساويا لأحد الاخراف الجانبية للسطح المذكور فانفراده متكونا من مستطيل واحد قاعدته تساوى مجموع قواعد اوجهم وارتفاعه مساو لأحد الاخراف الجانبية

وشكل (٢٤٢) يبين انفراد سطح منشور رباغى قائم منتظم ويتكون من اربعة مستطيلات أما المربع الاعلا والمربع الاسفل فيمثل قاعدتي ذلك المنشور



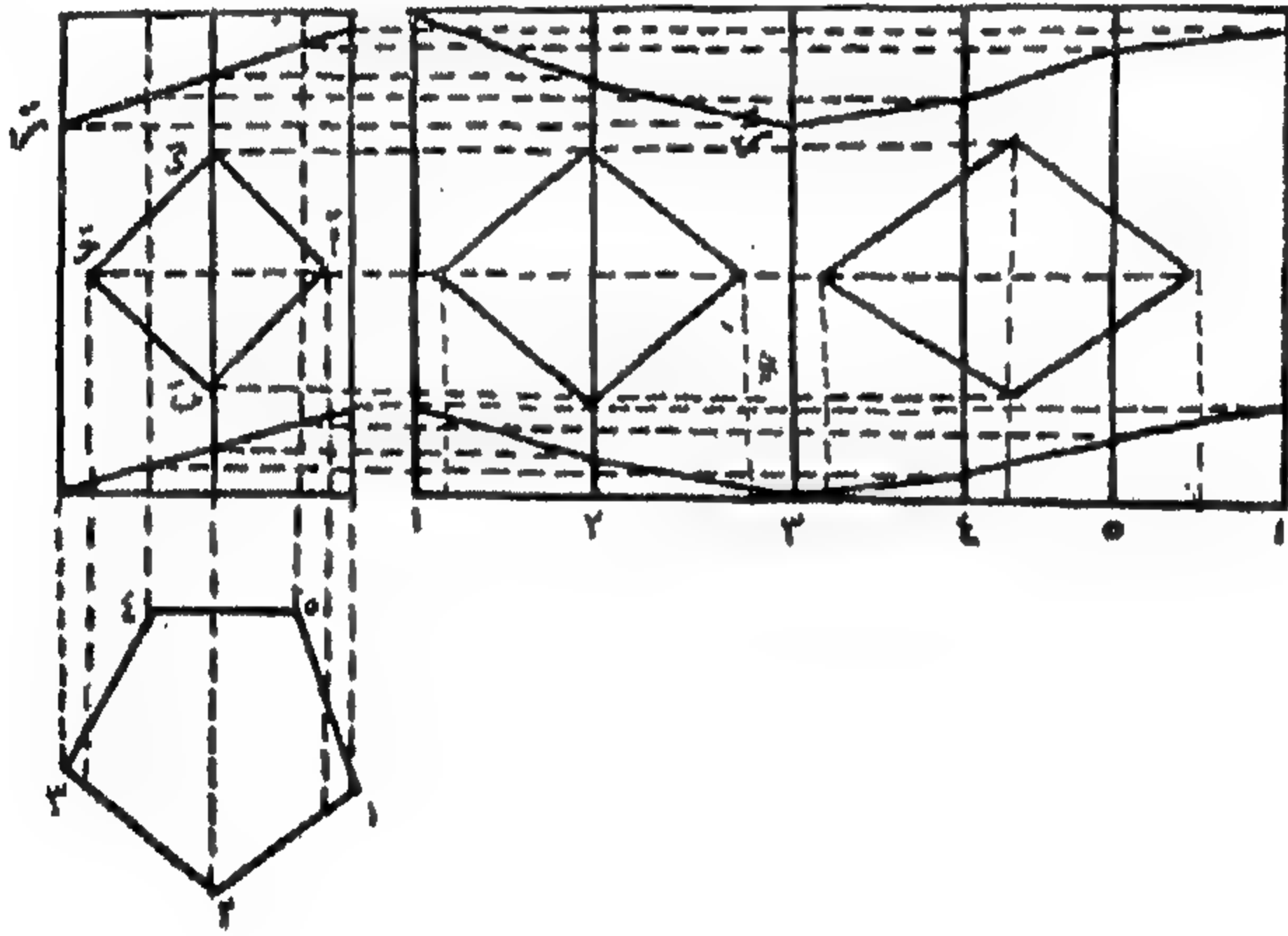
شكل (٢٤٢)

شكل (٢٤٣)

شكل (٢٤٤)

وشكل (٢٤٣) يبين انفراد منشور ثلاثي قائم يتكون من ثلاث مستطيلات وهي اسطحه الجانبية ومثلثين وهما قاعدته

والشكل (٢٤٥) يبين المسقط الرأسى والافقى لمنشور خماسى قائم قاعدته افقيتان فالسطح الرأسية لجوانبه هي عبارة عن مستطيلات ارتفاع كل منها هو ارتفاع المنشور وقواعدها تساوى اضلاع قاعدته كل لنظيره فاذا أخذنا خطا أفقيا ووضعنا عليه اطوال ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٥ - ٤ - ٣ - ٢ - ١ تساوى اضلاع القاعدة ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٥ - ٤ - ٣ - ٢ - ١ على التناظر مبتدئين من نقطة ١



شكل (٢٤٥)

ومنهيين بنقطة ١ ثم رسمنا من كل من النقط ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ١ أعمدة على الخط ١ - ١ كل منها بطول يساوى ارتفاع المنشور لتتج المستطيل المتكون من الخمسة مستطيلات وهي انفراد الأسطح الجانبية لهذا المنشور أما قاعدته فكل منها يساوى المضلع ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٥ - ٤ - ٣ - ٢ - ١ . فى المسقط الافقى

فاذا تصورنا أن هذا المنشور قطع بقطاعين مائلين متوازيين فصار منشورا مائلا فيمكننا إيجاد انفراد الجزء الواقع بين هذين المستويين وهو انفراد المنشور المائل المذكور كالآتى

نرسم من نهايات المساقط الرأسية لكل حرف من أحرف المنشور الجديد خطوط موازية للخط ١ - ١ ليقابل نظيره فى الانفراد مثلاً من نقطة ٢ على مسقط



الحرف عند الموازي الى أن يقابل الخط ٣ على الانفراد في نقطة  $r$  فاذا عينا كل  
النقط مثل  $r$  ووصلناها بخطوط مستقيمة لتنتج انفراد المنشور المائل المذكور

ولا يصعب على الطالب اذا اتبع هذه القاعدة إيجاد انفراد هذا المنشور  
إذا ثقب فيه ثقب مربع كالمبين مسقطه الرأسى بالمربع  $آ-ح-د$  وليلاحظ أنه  
يحتاج الآن الى اضافة أربع خطوط رأسية على جوانب المنشور وإيجاد مواضعها  
في الانفراد وهذه الخطوط هي محل تلاقي أركان الثقب بالأسطح الجانبية للمنشور  
فاذا رسمت موازيات من الأركان  $آ-ح-د$  أيضا لتقابل مواضع تلك الخطوط  
على الانفراد ورسمنا أيضا موازيات من نقط تقاطع أسطح الثقب بالاحرف الاصلية  
للمنشور حتى تقابل مواضع تلك الاحرف على الانفراد ووصلنا هذه النقط على  
التعاقب لتكوّن انفراد ذلك الثقب بسهولة و كل ذلك واضح بالشكل (٢٤٥)

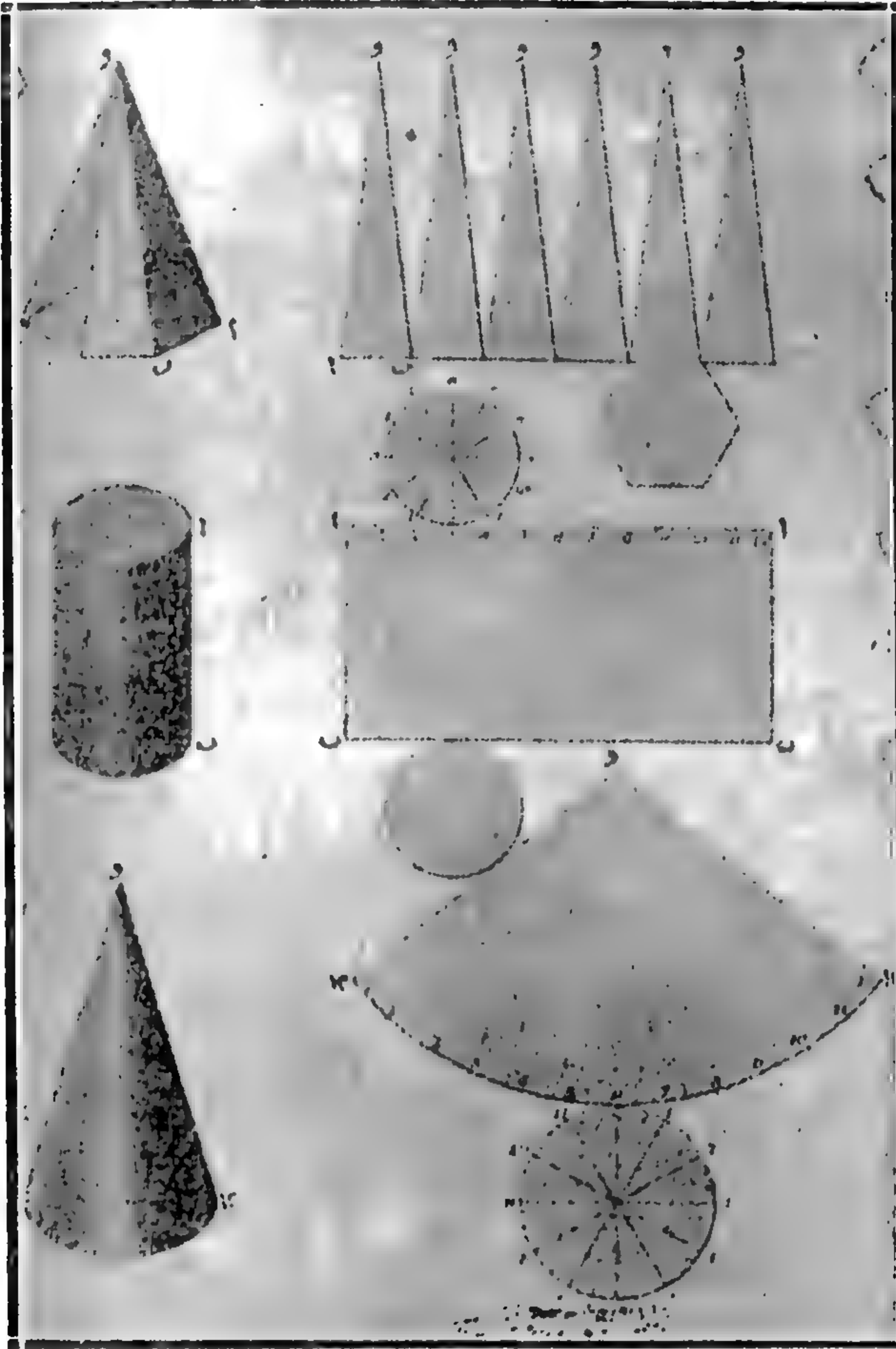
**السطح الهرمى :** — هو نوع من السطوح المنكسرة يتولد عن تحرك الرأس  
المستقيم حالة كونه ماراً بنقطة ثابتة ومتكثفا على خط منكسر مستو غير موجود  
في مستويه

والأكثر استعمالا من هذا النوع في الاعمال الفنية ما كان داله مضلعا منتظما  
والنقطة الثابتة موجودة على العامود القائم من مركزه على مستويه ويطلق عليه  
الهرم القائم المنتظم

وللحصول على انفراد السطح الهرمى المنتظم يلاحظ أنه بالنظر لتكوين سطحه  
الجانبى من مثلثات متساوية الساقين ومتساوية ينفرد سطحه على قطاع من مضلع منتظم  
نصف قطر الدائرة المرسومة عليه يكون مساويا لطول أحد الاحرف الجانبية للسطح  
وكل من أضلاعه مساويا لطول أحد أضلاع الدال

فاذا كان الهرم غير منتظم فانفراد سطحه الجانبى يتكون من مثلثات يمثل كل  
منها وجه من أوجهه الجانبية على التوالى بإبعاده الحقيقية كما فى الشكل (٢٤٩)

وشكل (٢٤٤) يبين انفراد هرم رباعى قائم منتظم ويتكون من أربع مثلثات  
كل منها متساوى الساقين وقد وضعت المثلثات فى هذا المثال بحيث كانت قواعدها



شكل (٢٤٦)

شكل (٢٤٧)

شكل (٢٤٨)

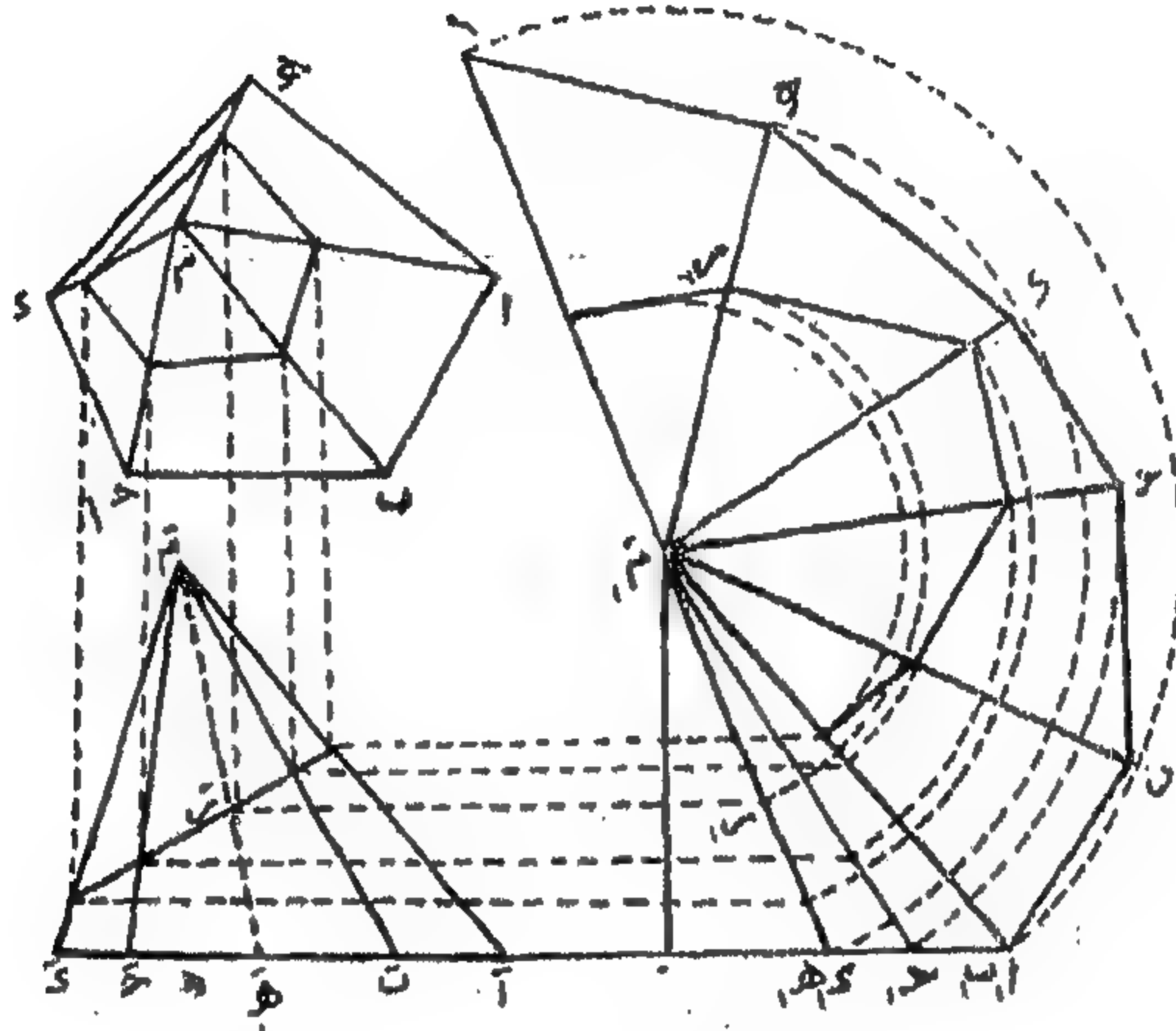
أفقية ويمكن رسمها كما ذكر آنفاً يجعل رؤوسها في نقطة واحدة وكلتا الطريقتين تفيان بالغرض المطلوب

وشكل (٢٤٦) يبين انفراد هرم سداسي قائم منتظم بنفس الطريقة التي اتبعت في انفراد الهرم الرباعي السابق الذكر .

والشكل (٢٤٩) يبين المسقط الأفقي والرأسي لهرم خماسي غير قائم قاعدته أفقية ولايجاد انفراده يؤتى أولاً بالأطوال الحقيقية لأحرفه المائلة هكذا :-

كل حرف من هذه الأحرف هو وتر لمثلث قائم الزاوية ارتفاعه يساوى

ارتفاع الهرم وطول قاعدته هو طول المسقط الافقى لهذا الحرف فاذا أخذنا على امتداد المسقط الرأسى للقاعدة الاطوال  $م_١ م_٢ م_٣ م_٤ م_٥ م_٦ م_٧ م_٨ م_٩$  يساوى كل منها المساقط الافقية للاحرف وهى على التناظر  $م_١ م_٢ م_٣ م_٤ م_٥ م_٦ م_٧ م_٨ م_٩$



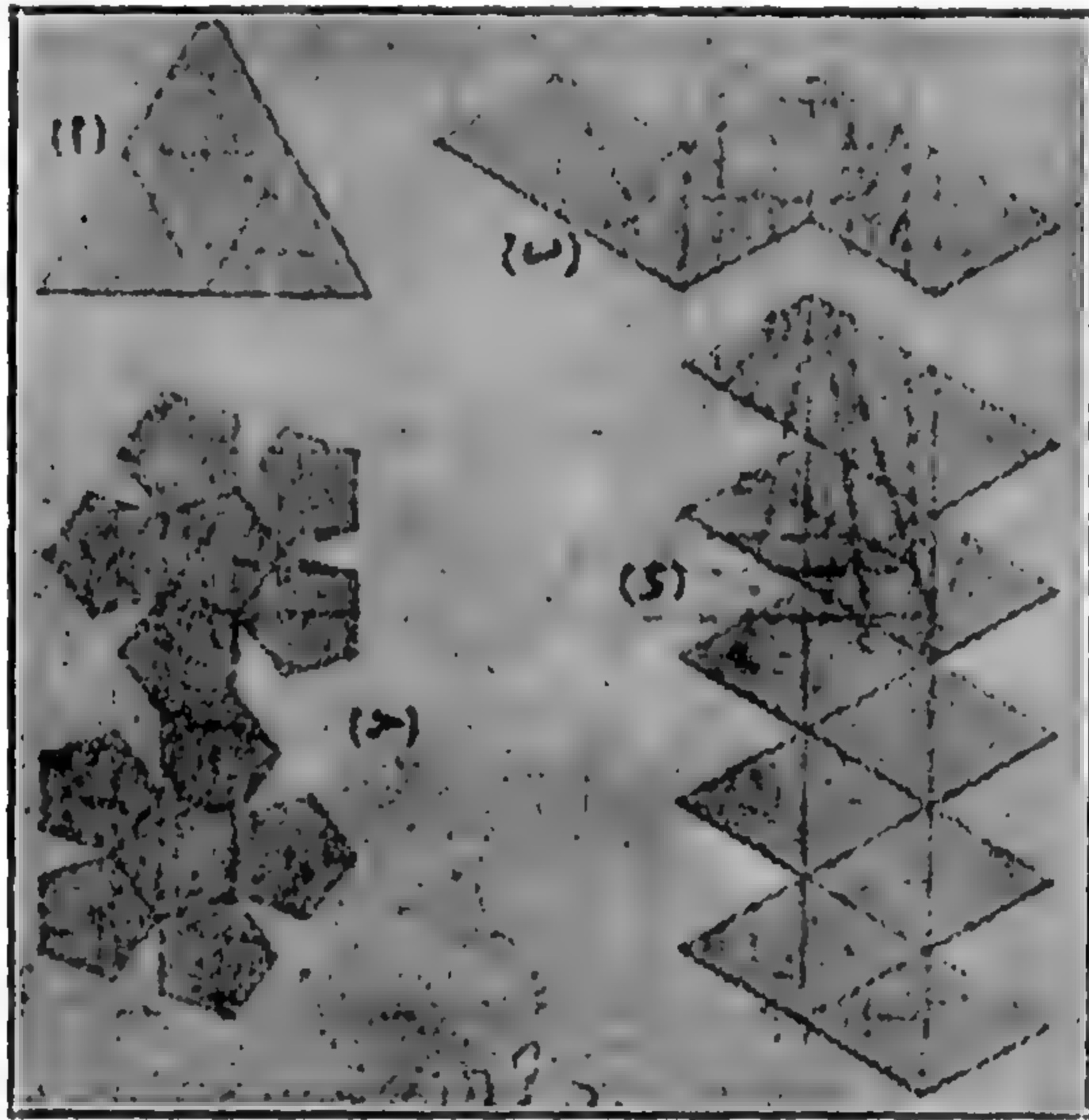
شكل (٢٤٩)

ثم من  $م_١$  أقمنا عموداً على  $م_١ هـ$  وأخذنا عليه طول  $م_١ م_٢$  يساوى ارتفاع الهرم ووصلنا  $م_١ م_٢$  و  $م_٢ م_٣$  و  $م_٣ م_٤$  و  $م_٤ م_٥$  و  $م_٥ م_٦$  و  $م_٦ م_٧$  و  $م_٧ م_٨$  و  $م_٨ م_٩$  وكانت هذه الاطوال هى أوتار المثلثات السابقة الذكر وهى أيضاً الاطوال الحقيقية لاحرف الهرم وصار اذاً من السهل معرفة الاشكال الحقيقية لمثلثات الواجهة الجانبية لان قواعدها جميعها معلوم أطوالها الحقيقية من المسقط الافقى لاضلاع قاعدة الهرم حيث أنها موازية للمستوى الافقى فاذا جمعنا الاشكال الحقيقية لتلك المثلثات بالشرط السابق لنتج الشكل  $م_١ م_٢ م_٣ م_٤ م_٥ م_٦ م_٧ م_٨ م_٩$  وهو انفراد الهرم

واذا قطع هذا الهرم بقطاع مائل لنتج عن القطاع هرم مائل فاذا رسمت موازيات لقاعد الهرم من نقط تقاطع المستوى المائل بالاحرف فى المسقط الرأسى مثل  $م_١ م_٢$  لتقابل الاطوال الحقيقية للاحرف كل لنظيره وركزنا فى رأس الانفراد وبطول يساوى المسافة من الرأس الى نقطة التقابل مثل  $م_١ م_٢$  ورسمنا اقواساً مثل  $م_١ م_٢$  تقابل الخطوط

المناظرة لها في الانفراد في نقط مثل  $\alpha$  ووصلنا هذه النقط لبعضها لتتج انفراد الهرم المائل وكذلك يمكن ايجاد انفراد الهرم الناقص لانه هرم مقطوع بمستوى يوازي قاعدته وكل ذلك مبين في شكل (٢٤٩)

والشكل (٢٥٠) (١) (٢) (٣) (٤) (٥) بين انفراد سطح الهرم الثلاثي المنتظم و سطح ذي الثمانية والاثنى عشر والعشرين وجها المنتظم على التوالي وواضح من الشكل كيفية ايجاد انفراد كل منها

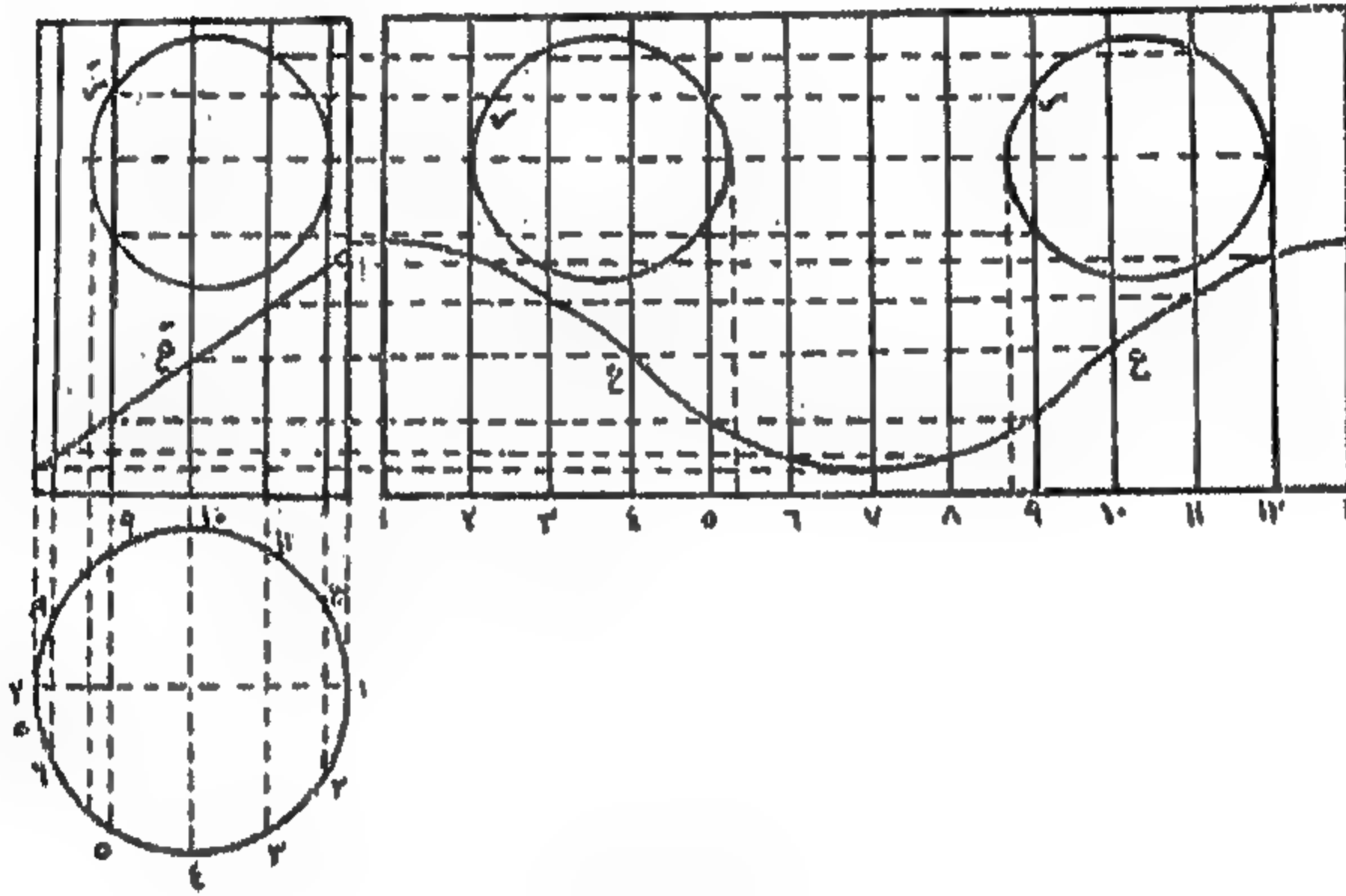


شكل (٢٥٠)

السطح الاسطوانى :- هو نوع من السطوح المركبة ويتولد عن تحريك الراسم المستقيم بالتوازي لنفسه حالة كونه متكئا على خط منحني مستوي غير موجود في مستويه والاكثر استعمالا من هذا النوع في الاعمال الفنية ما كان داله محيط دائرة ورأسه عمودا على مستويه ويسمى سطح اسطوانى تحريكى أو قائم ويمكن تعريف هذا السطح ايضا بانه هو نهاية لسطح منشورى تحتوى قاعدته على عدد لانهية له من الاضلاع فيمكن بهذا التعريف تطبيق جميع ما سبق في السطح المنشورى على السطح الاسطوانى



ويكفي ايضا للحصول على انفراد السطح الاسطوانى ان يرسم مستطيلا يوخذ أحد يعديه مساويا لمحيط قاعدة الاسطوانة وبعده الآخر مساويا لطول الراسم والشكل ٢٤٧ يبين منظورا لاسطوانة ويبين انفرادها وهو المستطيل ا ب ا وقد اتبعت فيها نفس الطريقة التى اتبعناها فى إيجاد انفراد المنشور بأن قسمت قاعدتها الى جملة اضلاع متساوية واخذنا طول ضلع مستطيل الانفراد ب ب مساويا لمحيط القاعدة وعلّمنا عليها مواضع رواسم وهمية وهى تقاطع الوجة الجانبية



شكل (٢٥١)

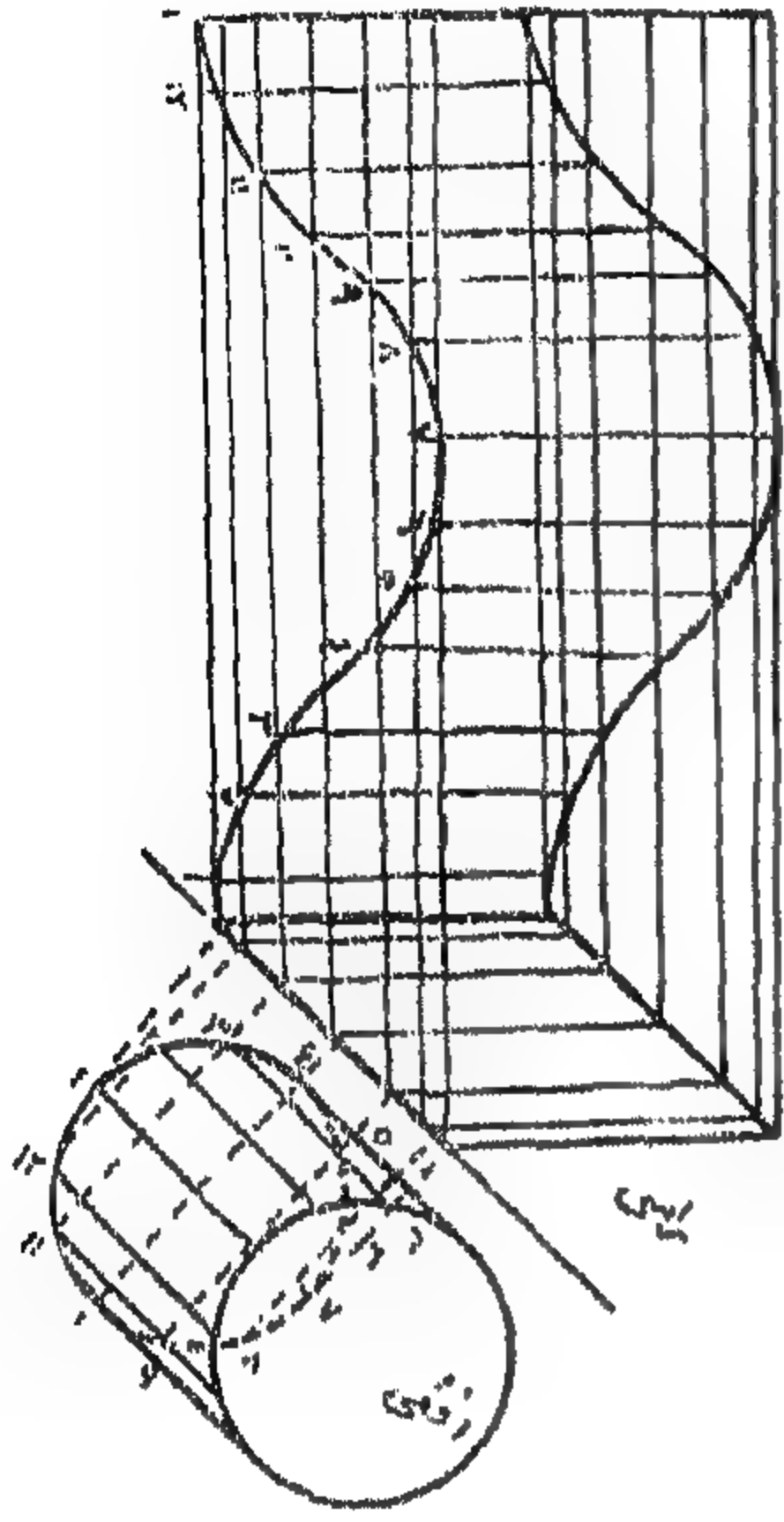
للاسطوانة بفرض أنها صارت منشورا واخذ طول كل راسم منها مساويا لارتفاع الاسطوانة فنتج المستطيل ا ب ا المذكور

والشكل (٢٥١) يبين انفراد اسطوانة كالسابقة وبها ثقب مستدير ويبين ايضا انفراد قطاع مائل فيها والشكل (٢٥٢) يبين كيفية إيجاد انفراد سطح اسطوانة مائلة قاعدتها متوازيتين وهو كما يأتى:—

تقسم الدائرة التى هى المسقط الافقى لقاعدة الاسطوانة الى اثني عشر قسما عند النقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ومن تلك النقط التى نعتبرها نهايات جملة رواسم فى الاسطوانة نجد المساقط الرأسية والافقية لتلك الرواسم وعند الانفراد لا نجد أن هذه الرواسم متساوية البعد عن بعضها كما كان ذلك فى انفراد رواسم الاسطوانة القائمة بل نجد



أن كل من المسافات ١ - ٢٦٢ - ٣٦٣ - ٤ يساوى بالتقريب جزء من



شكل ( ٢٥٢ )

اثنى عشر جزءا من محيط القاعدة والنقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢  
المنح على الانفراد تقع على خطوط متعامدة على المسقط  
الرأسى لمحور الاسطوانة كما هو مبين بالشكل وحينئذ  
يمكن تعيين تلك النقط على الانفراد بسهولة بأخذ أبعاد  
متساوية ومساوية الى وتر قوس يساوى  $\frac{1}{12}$  من محيط  
القاعدة مبتدئين من النقطة ١ الى ١٢ ورسم موازيات  
منها للمسقط الرأسى لرأس الاسطوانة وأخذ طول كل  
من هذه الموازيات يساوى طول المسقط الرأسى للرأس  
أبنا ينتج فى النهاية الشكل المحدود بمنحنين  
متوازيين المبين فى الشكل ( ٢٥٢ )

السطح المخروطى : هو نوع من السطوح المركبة يتولد عن تحرك الرأس  
المستقيم حالة كونه مارا بنقطة ثابتة ومتكثرا على خط منحني مستو غير  
موجود فى مستويه والاكثر استعمالا من هذا النوع فى الاعمال الفنية ما كان داله  
محيط دائرة والنقطة الثابتة موجودة على العمود القائم من مركزه على مستويه  
ويسمى سطحاً مخروطياً تحريكاً أو قائماً

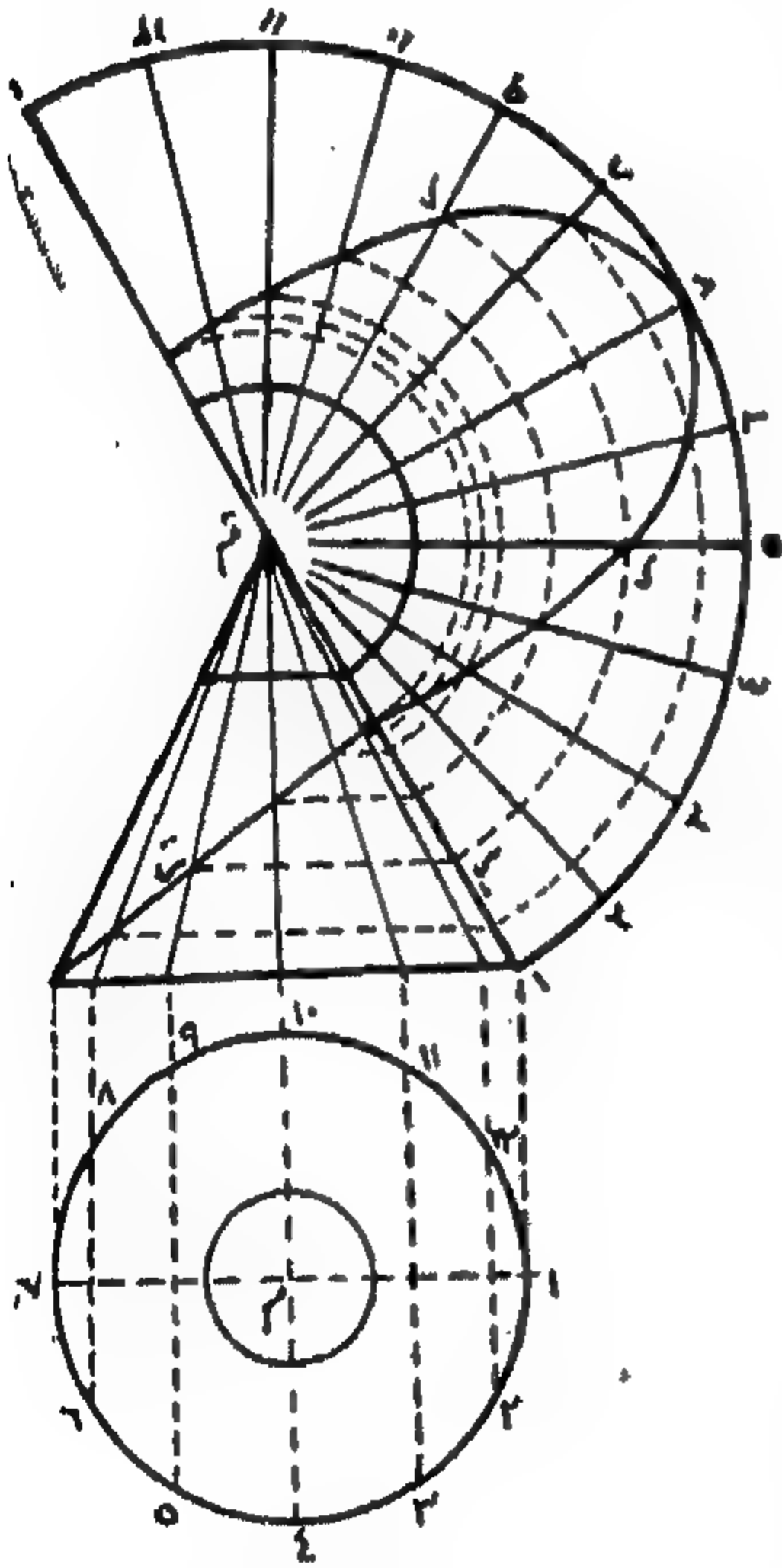
فلاحصل على انفراد هذا السطح يلاحظ انه ينفرّد على قطاع دائرى  
قطره مساو لطول رأسه ومقدار الزاوية المحصورة به تتعين من القانون الآتى وهو

$$\theta = \frac{360 \times \sin}{L} \text{ حيث } \theta \text{ هي الزاوية المحصورة بالقطاع الدائرى و } \sin \text{ نصف}$$

قطر قاعده المخروط و L طول الرأس وبطريقة أخرى يمكننا رسم القطاع الدائرى  
هذا بأن نركز فى رأس المخروط وننصف قطر يساوى طول الرأس ونرسم قوسا  
من دائرة مساويا لمحيط قاعدة المخروط .

ولقياس طول هذا القوس عمليا يقسم محيط القاعدة الى اضلاع متساوية كما لو كان المخروط هرما شكل (٢٤٨) ولتكن اثني عشر ضلعا ١ و ٢ و ٣ الخ ويفتح البرجل بمقدار طول ضلع منها ويعلم على طول القوس أوتار عددها اثني عشر كل منها مساويا لفتحة البرجل فيتحدد طول القوس المساوي لمحيط قاعدة المخروط بالتقريب وكما زاد عدد الاقسام كلما قرب طول القوس من حقيقته

فاذا قطعنا المخروط شكل ٢٥٣ بقطاع مائل وأردنا إيجاد انفراد المخروط المائل المحدود بهذا القطاع كقاعدة ونقطة الرأس م نعين الأطوال الحقيقية للرواسم المقطوعة مثل م ر برسم خط مواز للقاعدة من ر الى أن يقابل الراسم م ا في نقطة ر فيكون الطول م ر هو الطول الحقيقي للراسم المقطوع واذا أخذنا



شكل (٢٥٣)

هذا الطول على موضع الراسم في الانفراد وهو م ر على الخط م - ر تكون نقطة ر هي إحدى نقط انفراد القطاع وبايجاد النقط الأخرى مثل ر وتوصيلها بمنحن ينتج انفراد القطاع المطلوب وهو مبين بالشكل (٢٥٣)

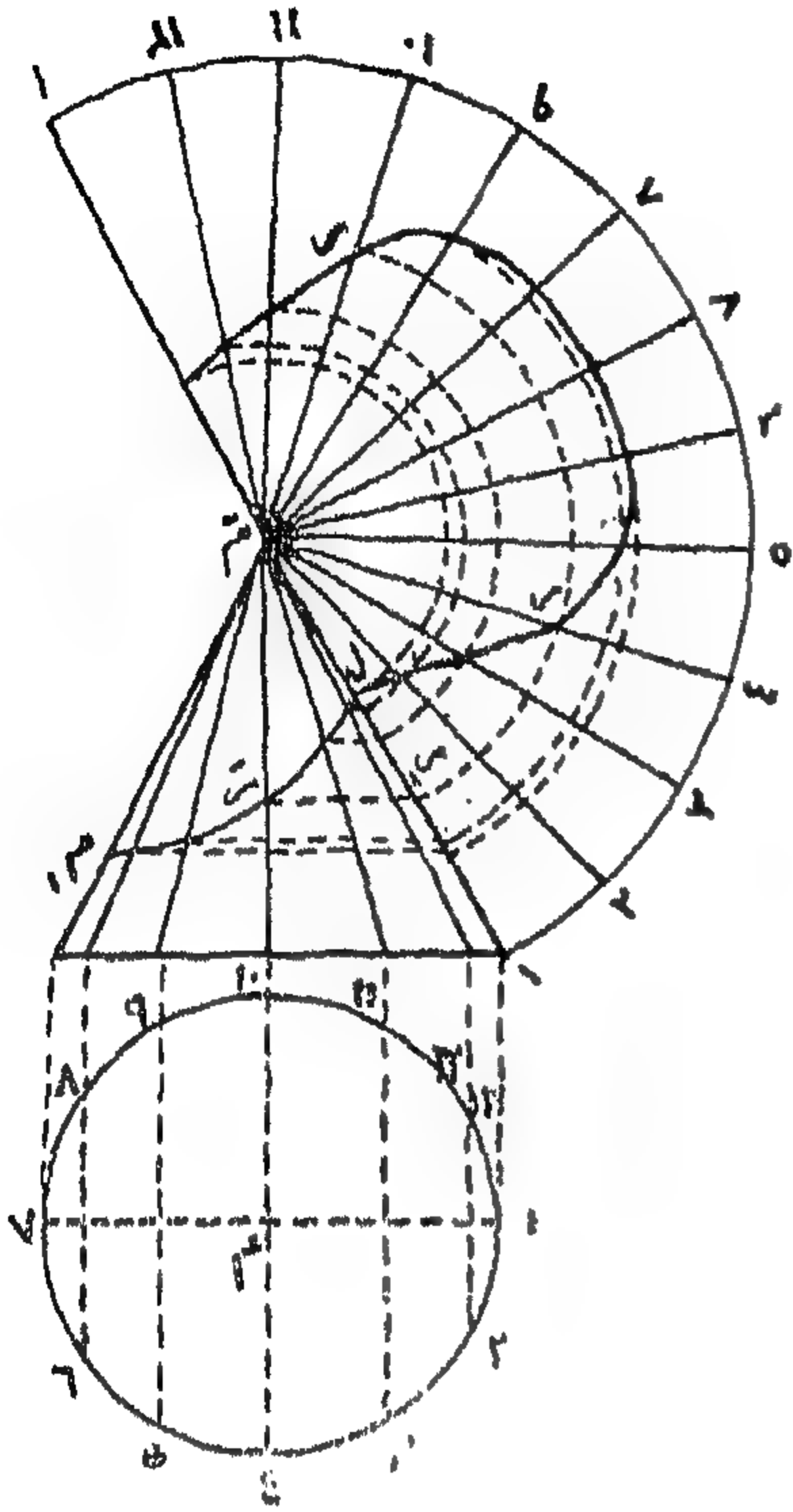
وهكذا يمكننا إيجاد انفراد المخروط الناقص بقطعه بقطاع يوازي القاعدة فيكون انفراد المخروط الناقص هو عبارة عن جزء من حلقة دائرية كما بالشكل أيضا

والشكل (٢٥٤) يبين المسقط الرأسى والافقى للمخروط السابق الذكر ومقطوع بقطاع منحني م ن فلايجاد انفراد الجزء الباقي من

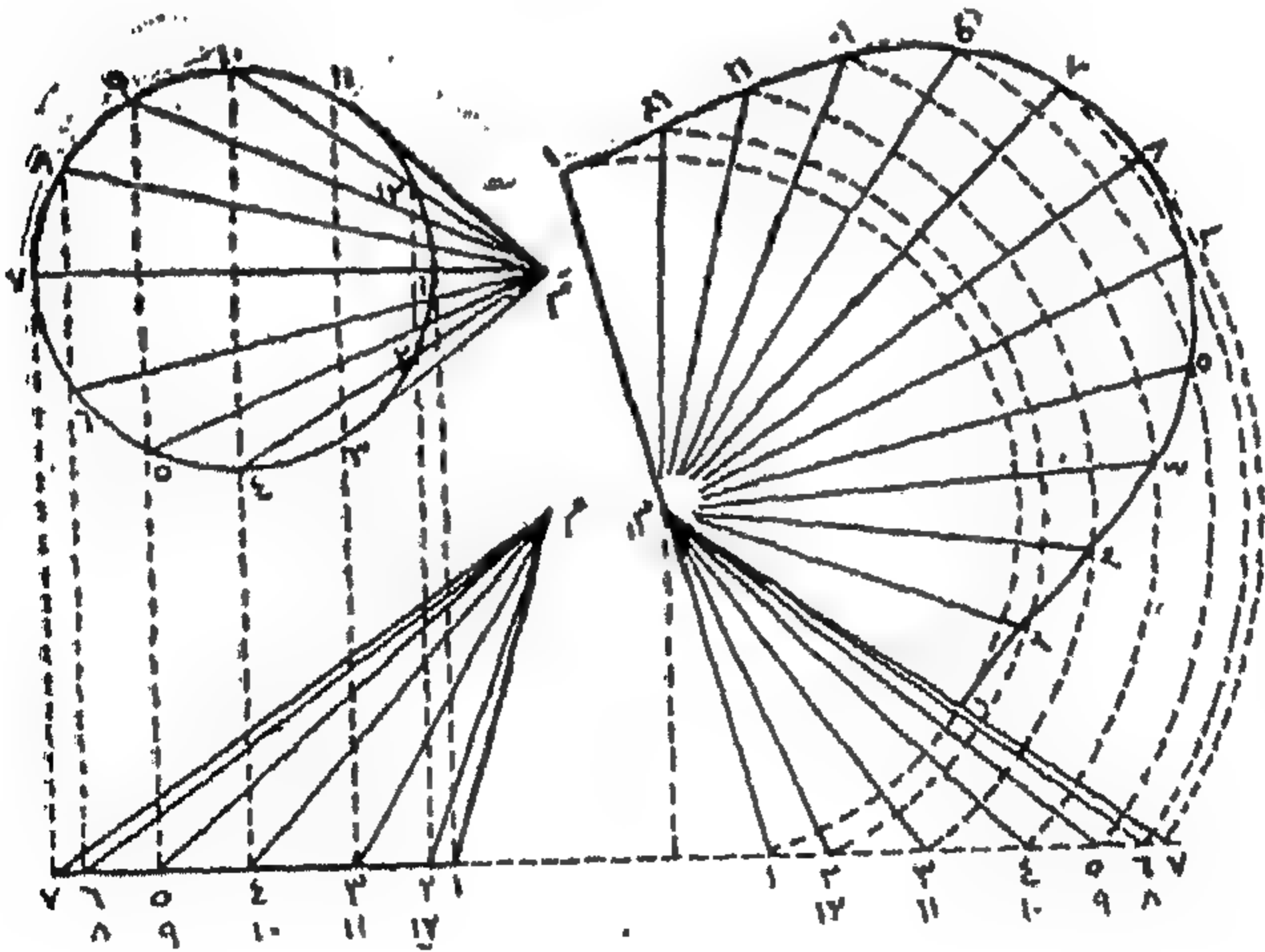
المخروط نعين المساقط الرأسية والافقية لجملة رواسم على المخروط كما لو كان هرما ونأت بانفراد المخروط بالكامل ونضع مواضع الرواسم على هذا الانفراد مثل م - ١ م - ٢ م - ٣ الخ ثم نأخذ نقط تقاطع القطاع بالمساقط الرأسية

للاواسم ونرسم منها موازيات للقاعده  
مثل الموزى من نقطة  $s$  مثلا ليقابل  
الخط  $m-1$  وهو الطول الحقيقى لكل  
راسم فى المخروط فى نقطة  $s$  ونركز فى  
 $m$  وننصف قطر يساوى  $m-s$  ونرسم قوساً  
يقطع موضع الراسم  $m-10$  فى الانفراد  
فى نقطة  $s$  فيتوصليل جميع النقط مثل  $s$   
بعضها ينتج انفراد الجزء المطلوب

والشكل ( ٢٥٥ ) يبين كيفية ايجاد  
انفراد مخروط دائرى مائل وهو ما كانت  
رأسه ليست على خط عمودى من مركز  
قاعدته أو بمعنى آخر ما كان محوره مائلاً  
وهذه الطريقة تشابه تماماً طريقة انفراد  
هرم كما بالشكل فيمكن تخطيط جملة رواسم



شكل ( ٢٥٤ )



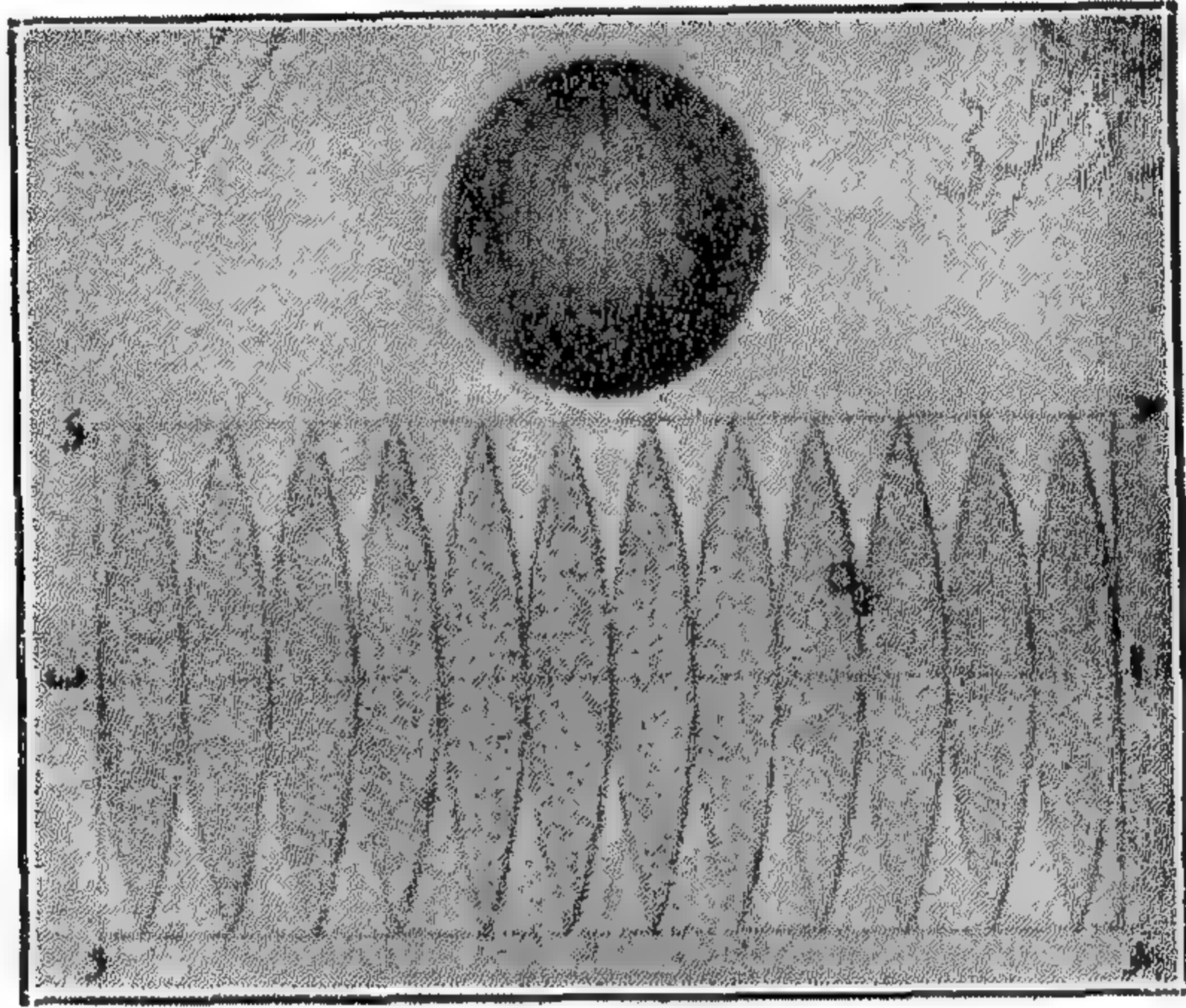
شكل ( ٢٥٥ )

على السطح الجانبي المخروط ومعرفة مساقطها الرأسية والافقية فيكون الطول  
الحقيقى لكل راسم هو عبارة عن طول وتر مثلث قائم الزاوية قاعدته تساوى طول



المسقط الافقى لذلك الراسم وارتفاعه يساوى ارتفاع المخروط فاذا أوجدنا أطوال  
الرواسم وفرضنا أن الواجهة الجانبية المحصورة بين تلك الرواسم هي الواجهة الجانبية  
لهرم كان من السهل إيجاد شكل الانفراد

فاذا وصلنا نهايات تلك الرواسم في الانفراد بمنحن بدلا من خطوط مستقيمة  
لتكوّن الشكل الحقيقي لنهاية السطح المخروطي لهذا المخروط وكل ذلك واضح بالشكل



( شكل ٢٥٦ )

### بند ٣٨ - السطوح الغير قابلة للانفراد

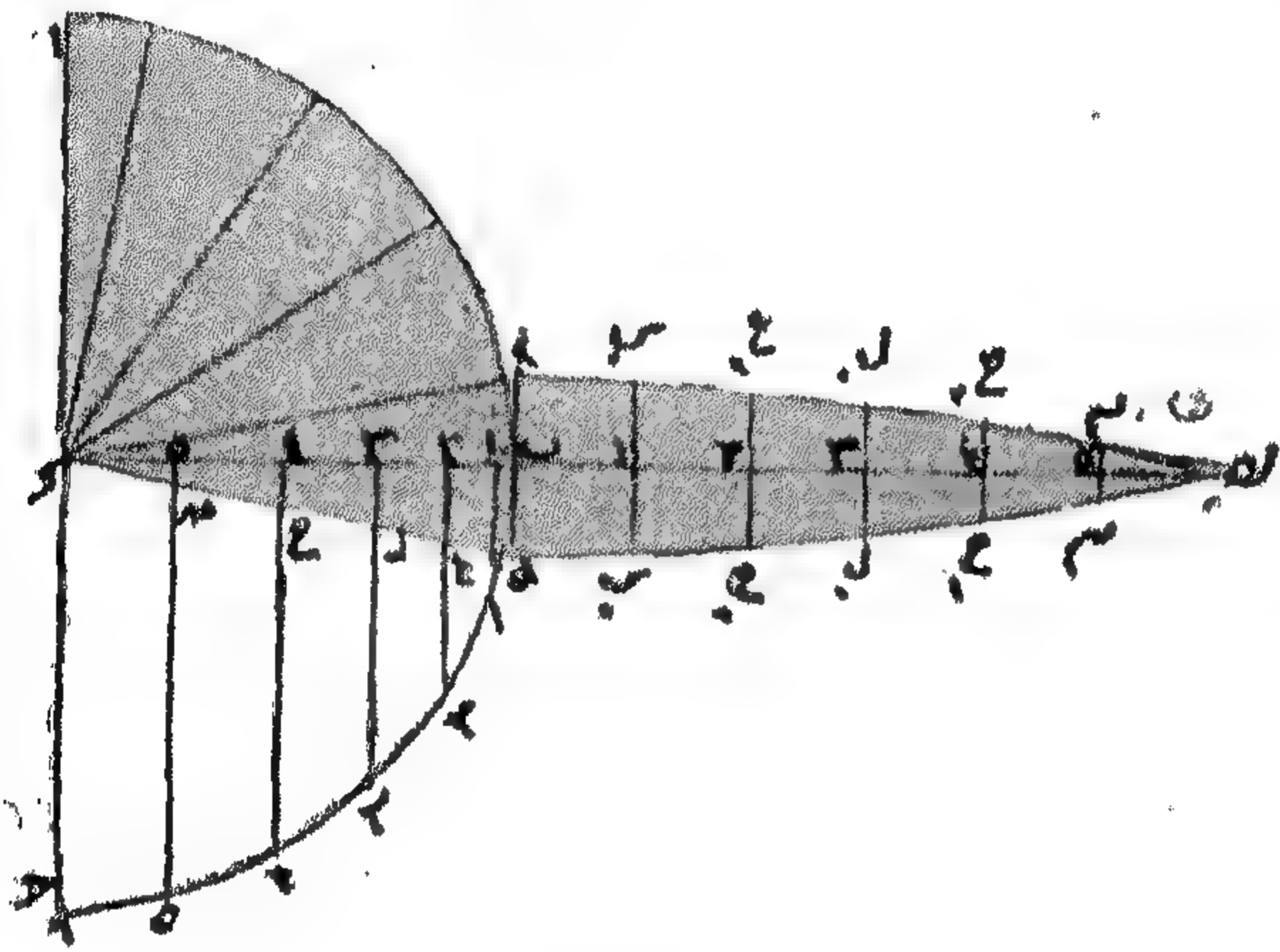
السطح الكروى : وهو نوع من السطوح المنحنية التحركية يتولد عن  
الدورة الكاملة لنصف محيط دائرة حول قطرها ونهايتى ذلك القطر يسميان  
بالقطبين . وللحصول على انفراد السطح الكروى شكل ( ٢٥٦ ) يقسم محيطه  
الى أقسام متساوية عددها اثني عشر ثم يرسم الخط  $AB$  مساويا لمحيط السطح  
الكروى ويؤخذ عليه أطوال هذه الاقسام على التوالى ثم يفتح البرجل فتحة تساوى  
تسعة أقسام من الاثني عشر قسما المذكورة ( أو بمعنى آخر تساوى ثلاثة أرباع  
المحيط ) ونرسم أقواسا تمر بنقط التقاسيم ومراكزها على امتداد الخط  $AB$  من  
الجهتين فيصير عدد تلك الاقواس اربع وعشرين قوسا يتقابل كل اثنين منها أعلى

واسفل في نقط على استقامة واحدة وعلى الخطين هـ و د و هـ و الموازين للخط ا ب  
وبذا يتكون اثني عشر شقة هي انفراد سطح الكرة المطلوب .

نصف الكرة أو القبة الدائرية : —

يمكن ايجاد انفراد نصف الكرة وهو نصف انفراد الكرة كما في البند السابق  
ويمكن ايجاده بطريقتين اخريتين ايضا كما يأتي : —

أولا - ليكن ا ب ح شكل (٢٥٧) هو نصف المسقط الافقي للقبة مركزه و  
العمل - نقسم نصف المسقط الافقي هذا الى اقسام متساوية وليكن و هـ و هو



شكل (٢٥٧)

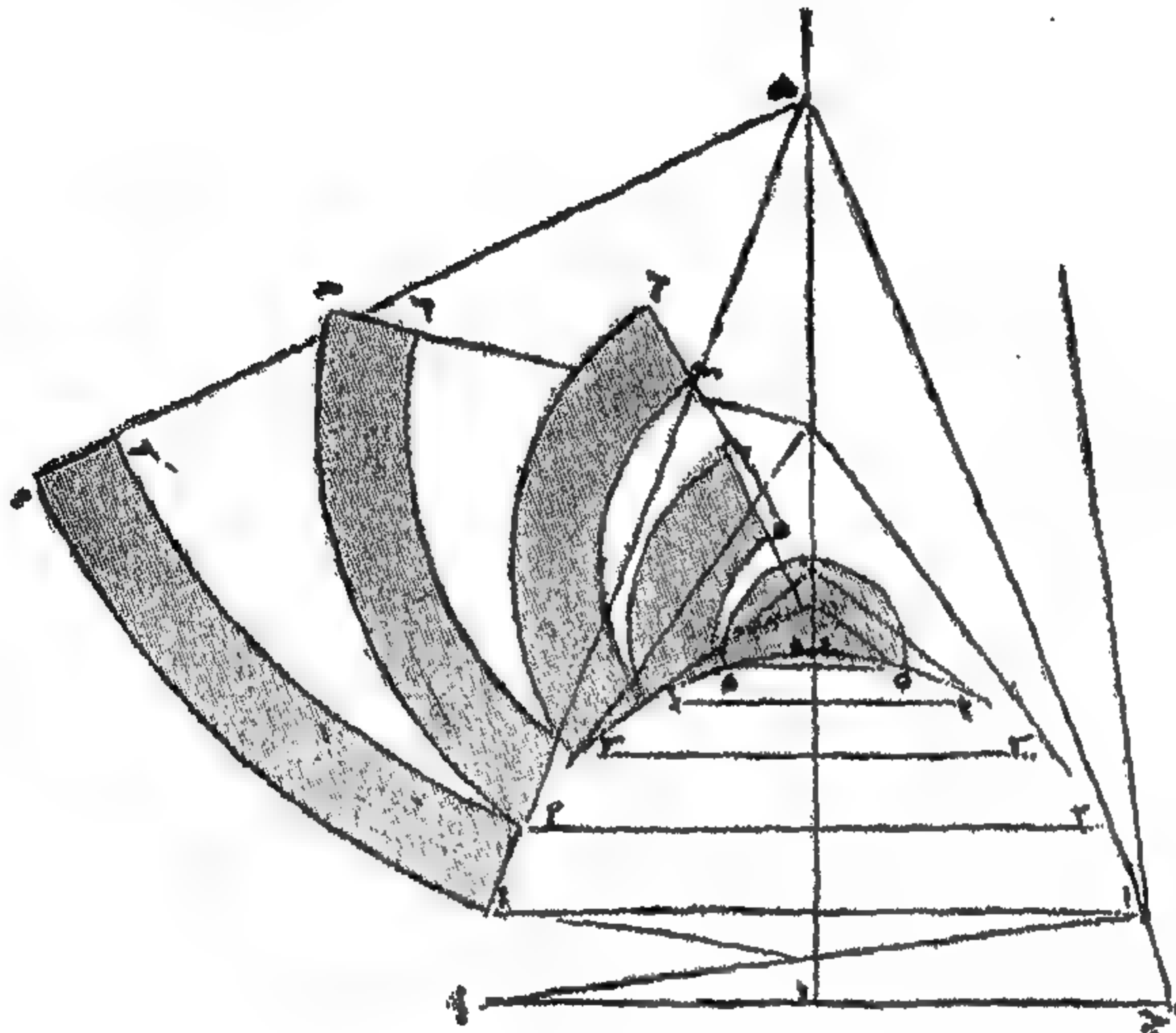
جزء من تلك الاقسام  
ونقطة ب هي منتصف  
القوس هـ و فنصل و ب  
ونعده من جهة ب  
الى لا بحيث تكون  
المسافة ب ك ربع  
محيط الدائرة و ثم  
نقسم ب ح وهو

ربع المحيط أيضا الى اقسام متساوية بالنقط ١ - ٢ - ٣ - ٤ الخ وبنفس الاقسام  
نقسم الخط ب ك ابتداء من ب ثم نرسم مستقيمت موازية لنصف القطر و ح من  
جميع النقط التي على ربع المحيط ب ح وكذا من النقط التي على ب ك فالمستقيمت  
المرسومة من النقط ١ - ٢ - ٣ على المحيط تقابل الخط المرسوم من هـ الى و في نقط  
مثل ع و د و ع الخ فنفتح البرجل بمسافات تساوي ١ - ع و د و ٢ - الخ المبتدئة من  
ب الى و ونعلمها على الخط من ب الى ك على التناظر من الجهتين فينتج النقط ع<sub>١</sub> د<sub>١</sub>  
ع<sub>٢</sub> د<sub>٢</sub> ع<sub>٣</sub> د<sub>٣</sub> ع<sub>٤</sub> د<sub>٤</sub> ع<sub>٥</sub> د<sub>٥</sub> ع<sub>٦</sub> د<sub>٦</sub> ع<sub>٧</sub> د<sub>٧</sub> ع<sub>٨</sub> د<sub>٨</sub> ع<sub>٩</sub> د<sub>٩</sub> ع<sub>١٠</sub> د<sub>١٠</sub> ع<sub>١١</sub> د<sub>١١</sub> ع<sub>١٢</sub> د<sub>١٢</sub> ينتج  
انفراد القسم و هـ و من اقسام القبة الدائرية وتتبع هذه الطريقة في باقي الاقسام  
فنحصل على انفراد القبة



ثانياً - ليكن اسم هو المسقط الرأسى للقبعة شكل (٢٥٨)

العمل : نقسم القبعة الى أقسام متساوية الارتفاعات بواسطة مستويات أفقية ونعتبر كل قسم منها كأنه مخروط ناقص ورؤوس كل هذه المخروطات تكون



شكل (٢٥٨)

على الخط و ه فمثلا

الجزء ١-٢-٢-١

هو مخروط ناقص قطر

قاعدته السفلى هو

الخط ١-١ فاذا اعتبرنا

ان كل من القوسين

٢-١ و ٢-١

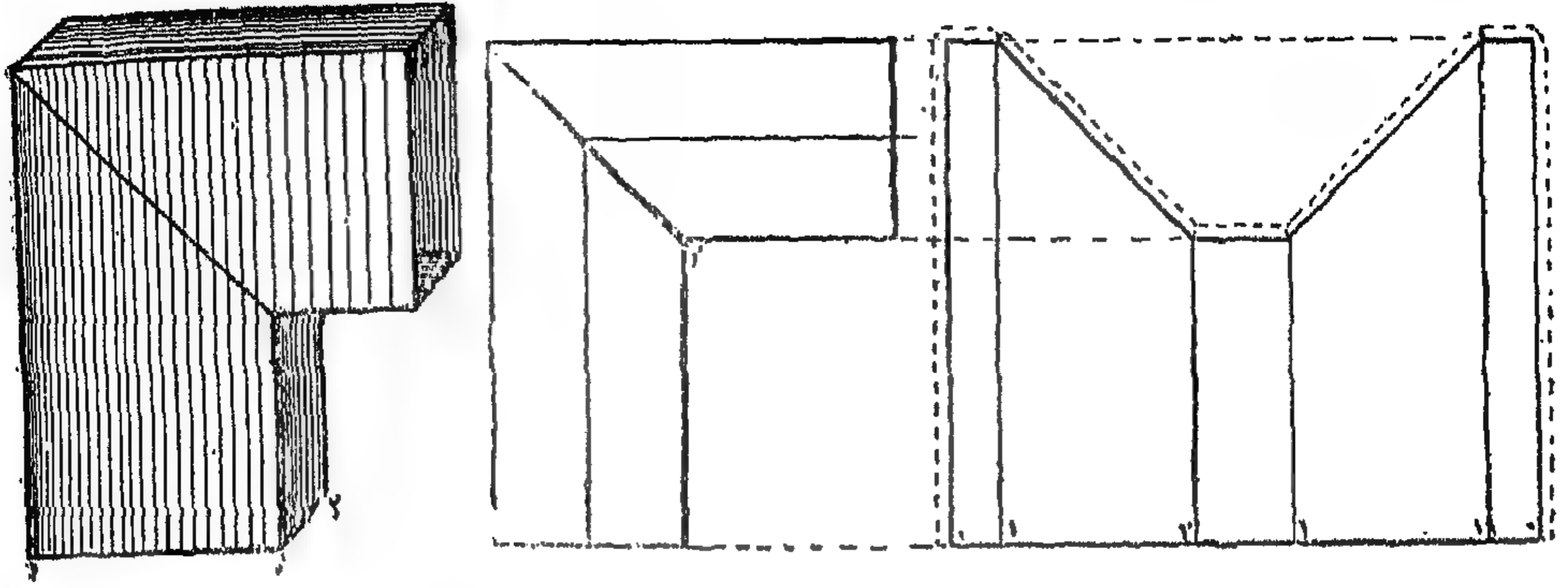
خطا مستقيما ومددناهما

على استقامتهما من

جهة ٢ ليقابلا و ه

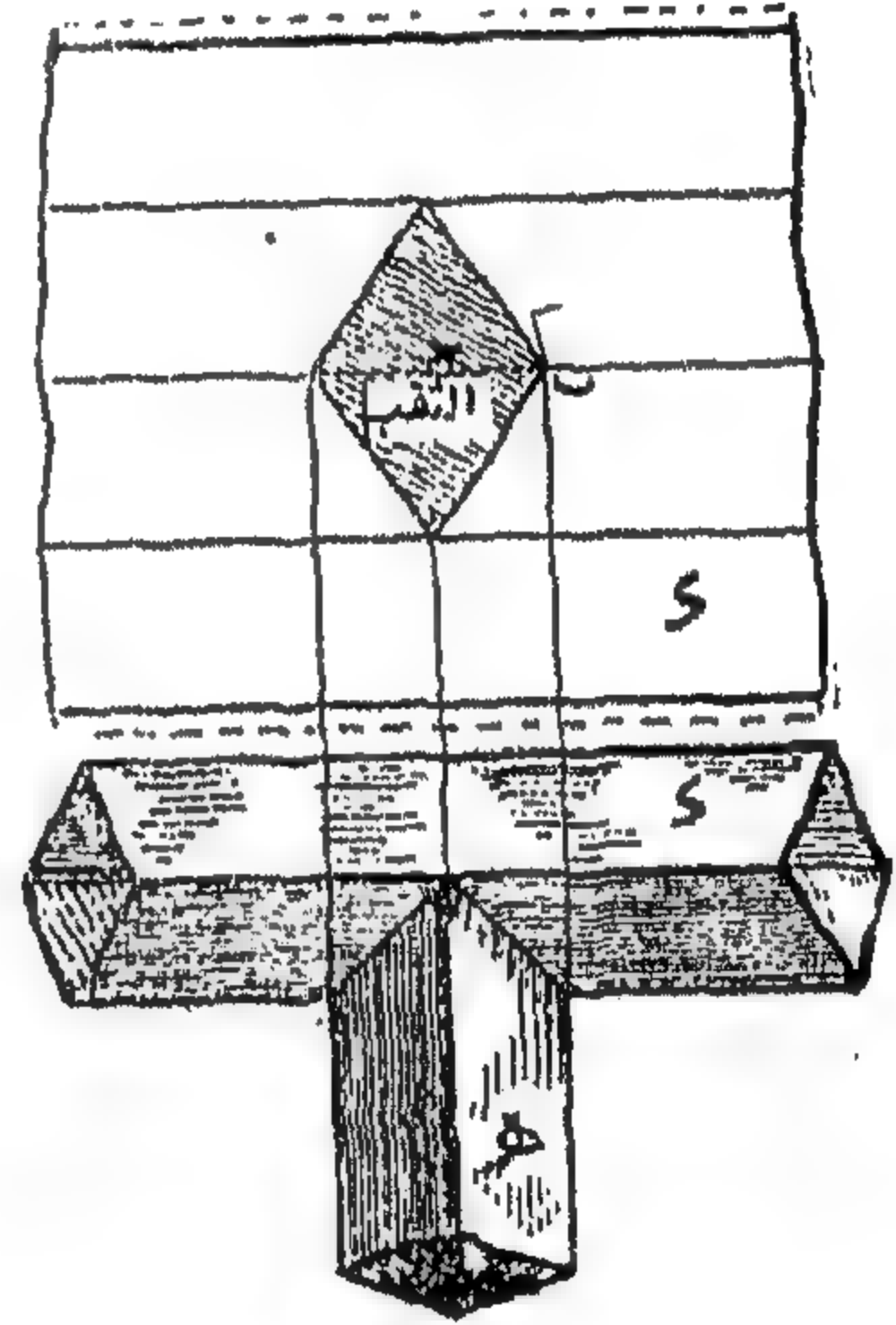
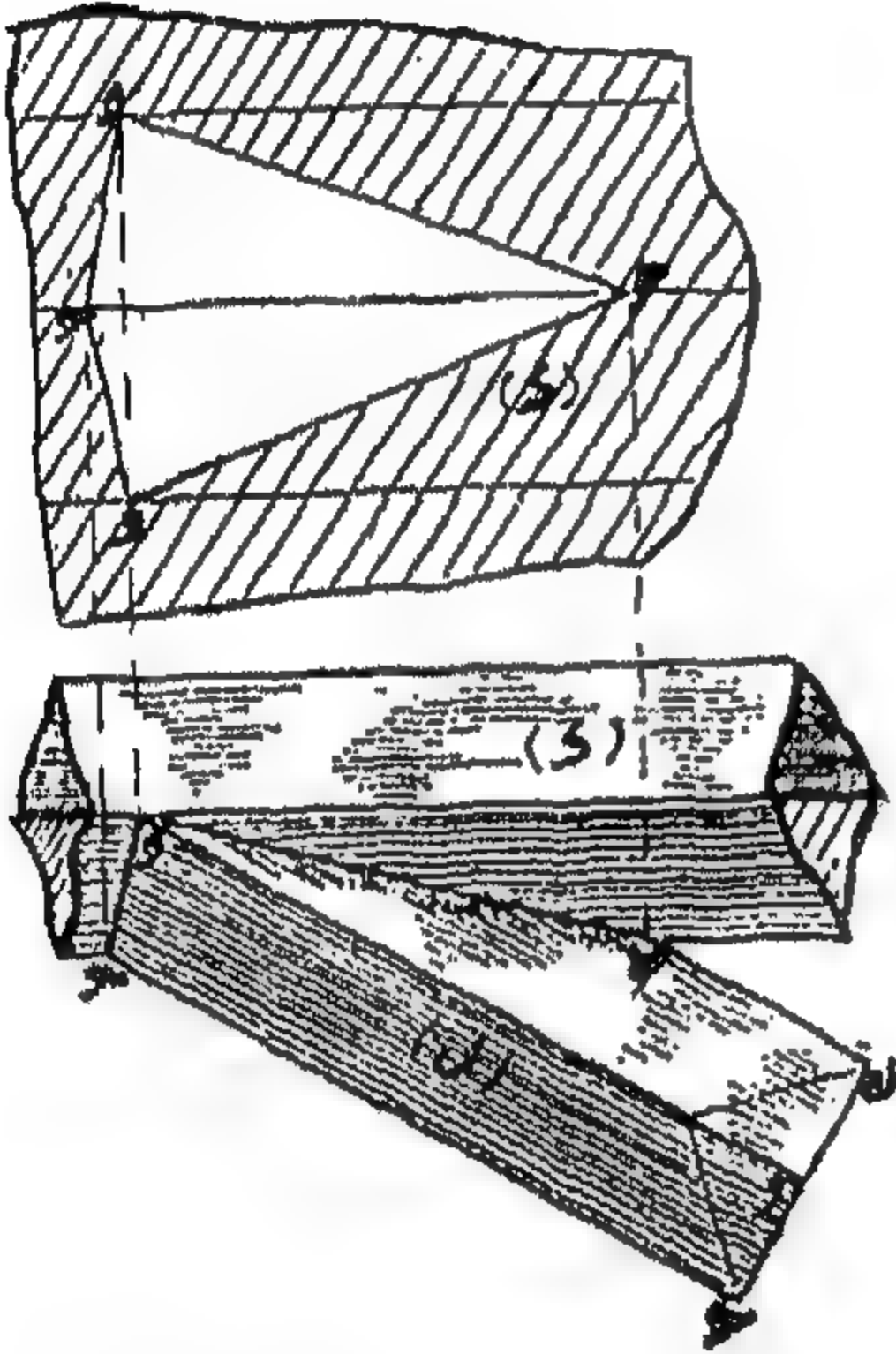
في ه السكانت ه هي رأس هذا المخروط الناقص الذي يمكن إيجاد انفراده بسهولة كما سبق وهكذا يتبع في اجزاء القبعة الباقية كما هو واضح من الشكل

ولاهية هذا الباب في أعمال السمكزية وغيرها تأتي بأمثلة محلولة لانفراد اسطح عدة أجسام بالاشكال من ٢٥٩ الى ٢٧٣ كثيرا ما تقع تحت نظر الطالب أو العامل فيستعين بها على استنباط الطرق الأخرى اللازمة لانفراد ما يقع تحت نظره خلافاً وقد اكتفينا برسمها دون ذكر الخطوات التي اتبعت في حلها حيث لا يمكن شرحها في الصفحات القليلة التي خصصت لهذا الباب من هذا الكتاب ومن يريد التعمق في هذا الباب فعليه الاطلاع في الكتب الخاصة بالانفراد وباشغال المعادن اللوحية التي ربما يعنى المؤلف الاول فيما بعد بوضع كتاب خاص فيها : —



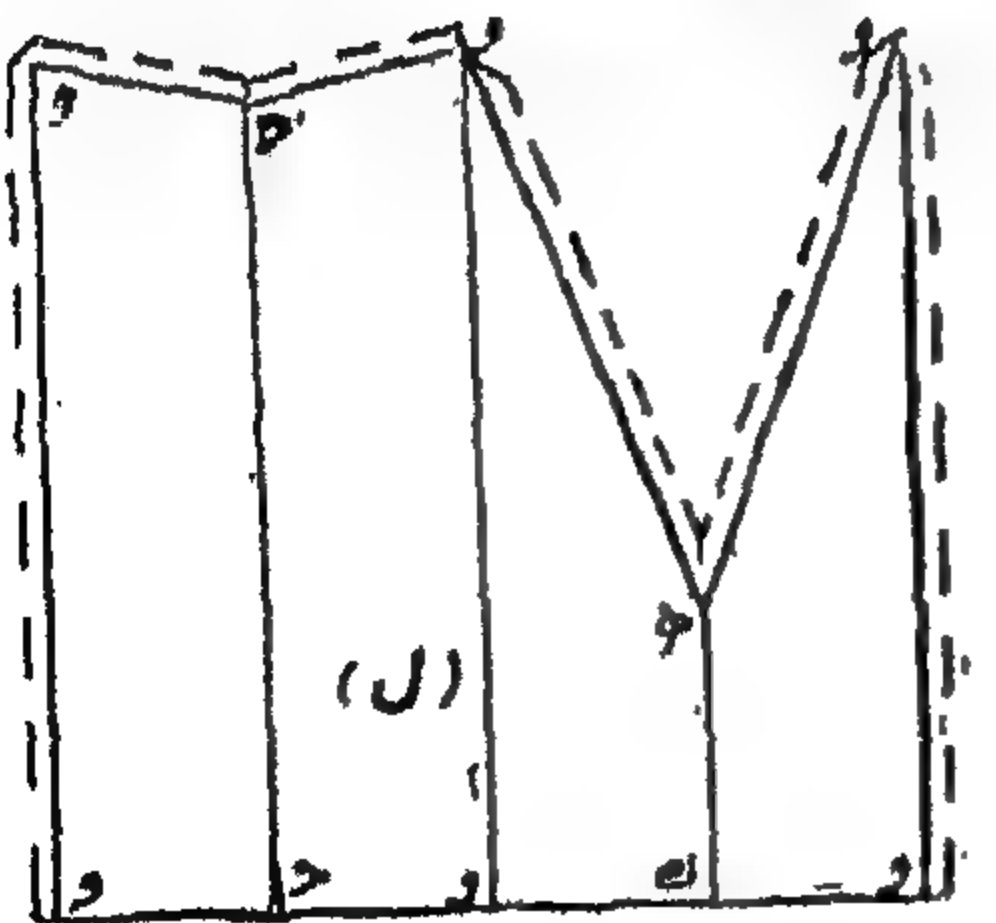
شكل (٢٥٩)

منظور ومسقط وانفراد احد جزئي كوع مربع لاسورة قطاعها مستطيل



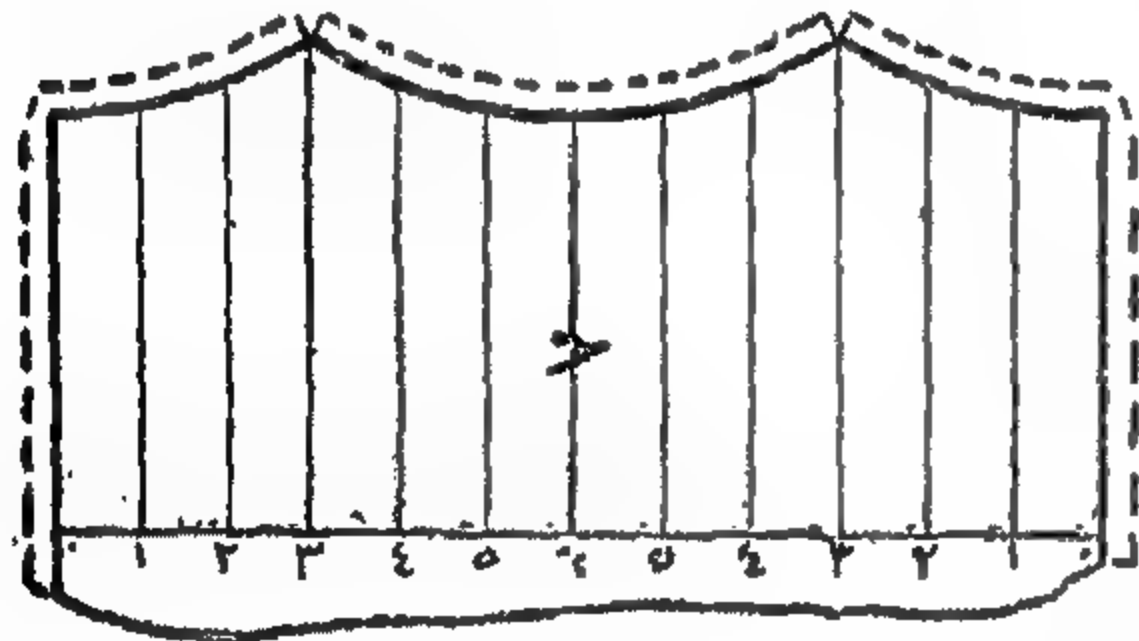
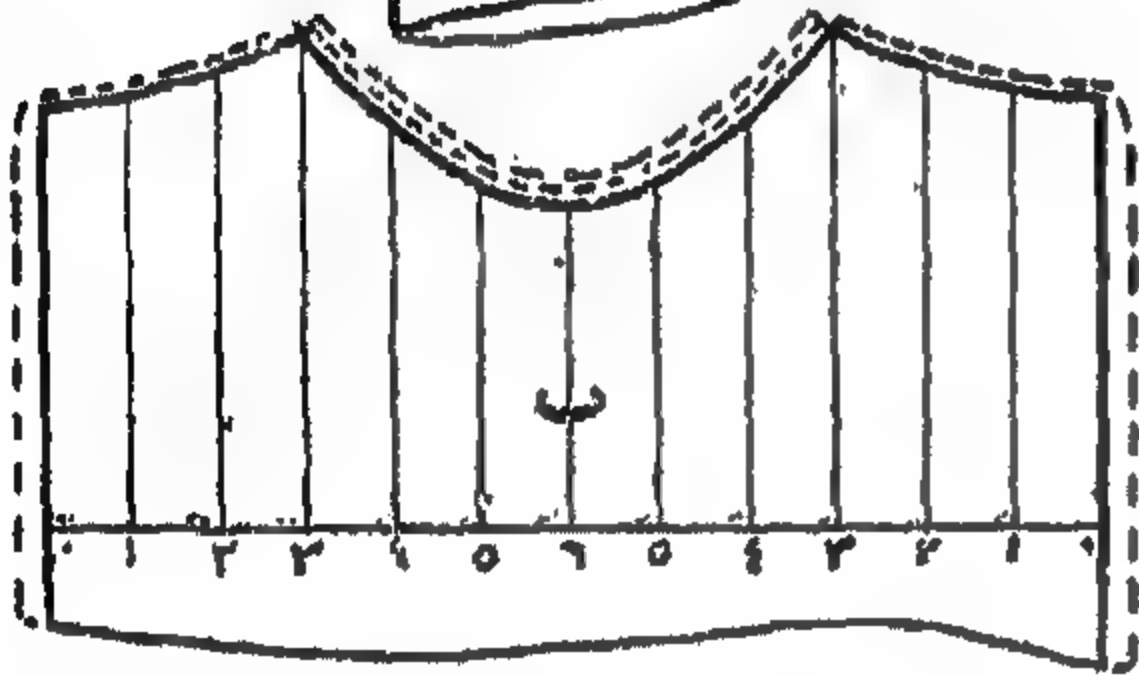
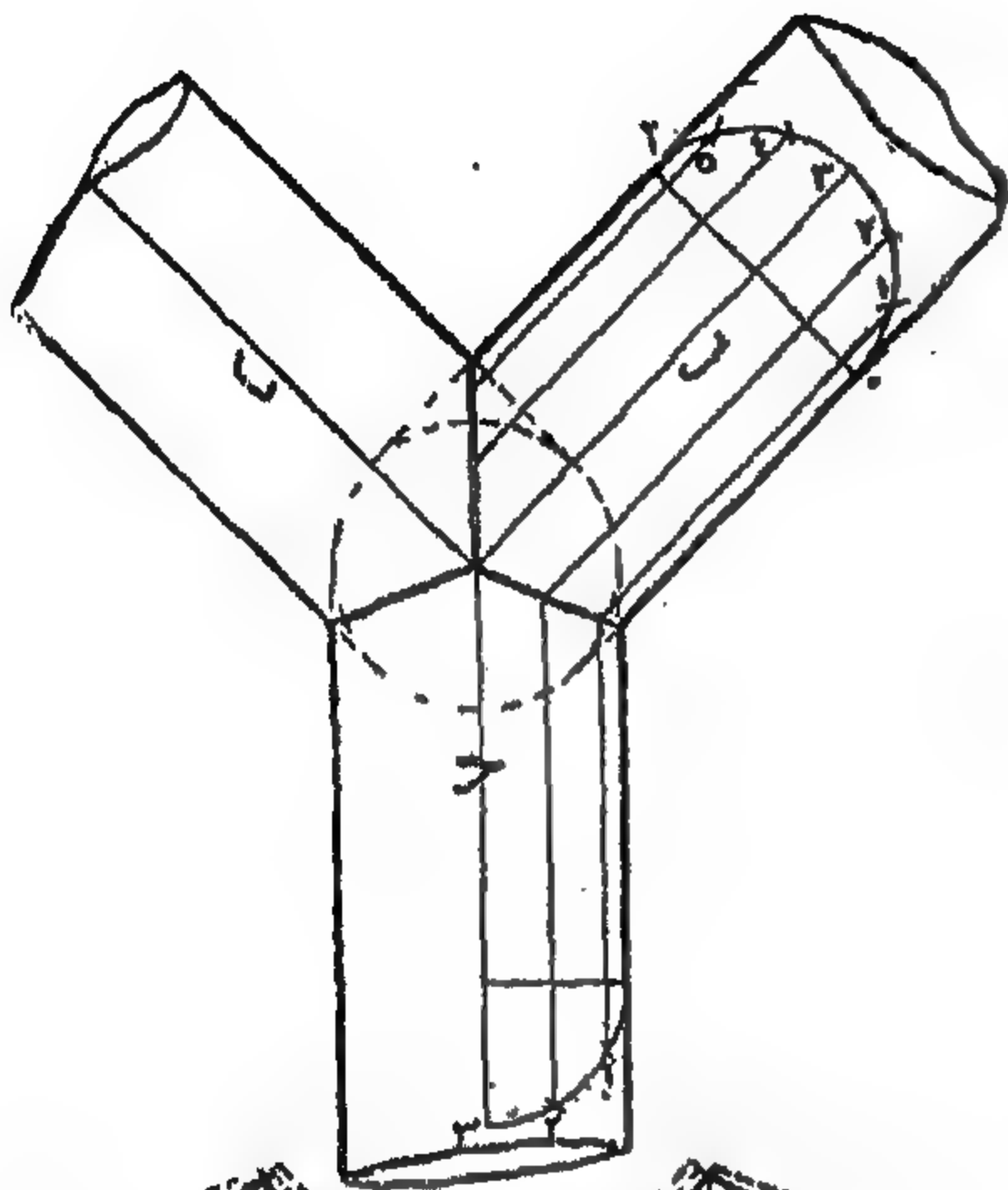
شكل (٢٦٠)

وصلة حرف T قائمة لاسورة مربعة

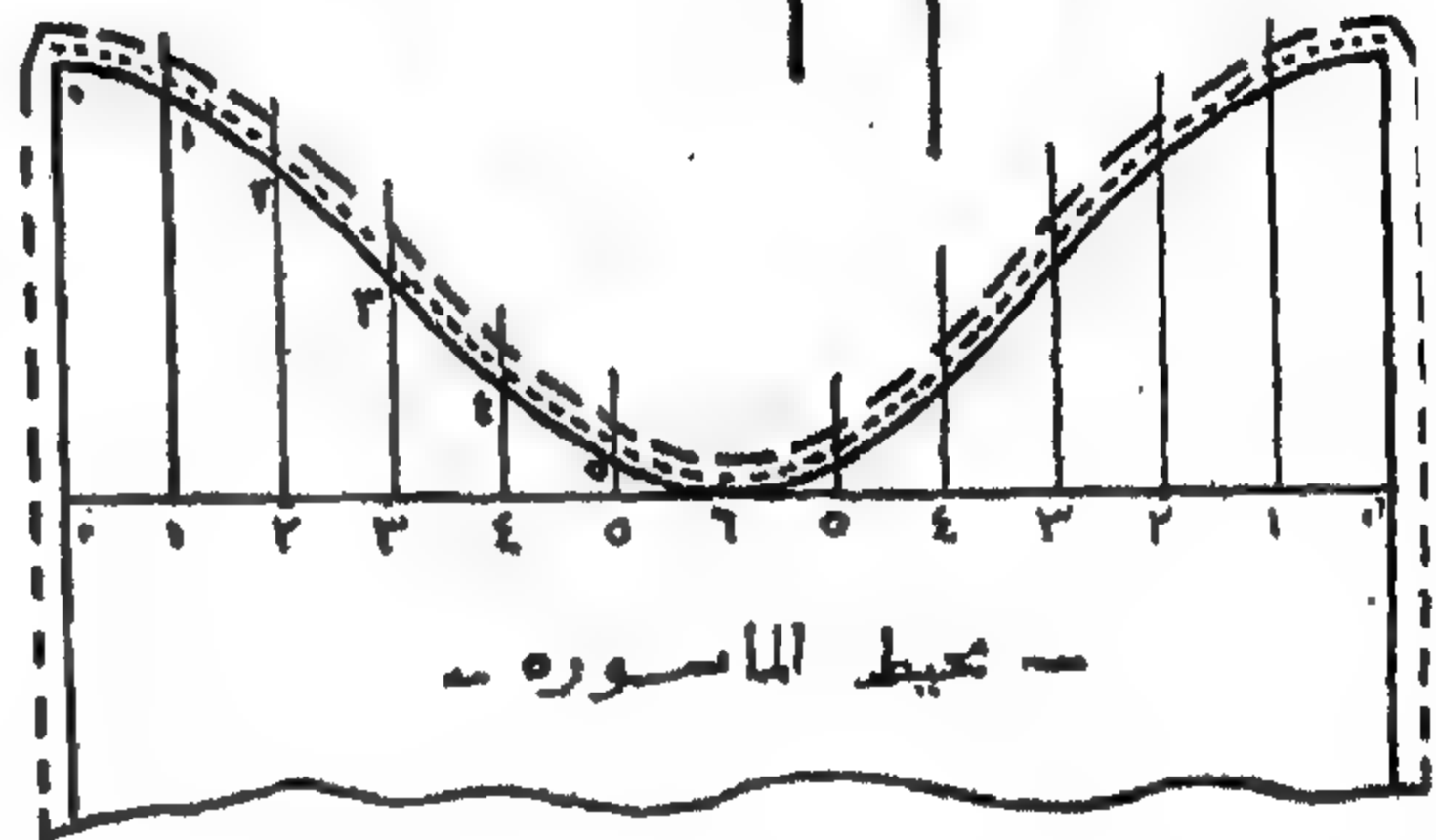
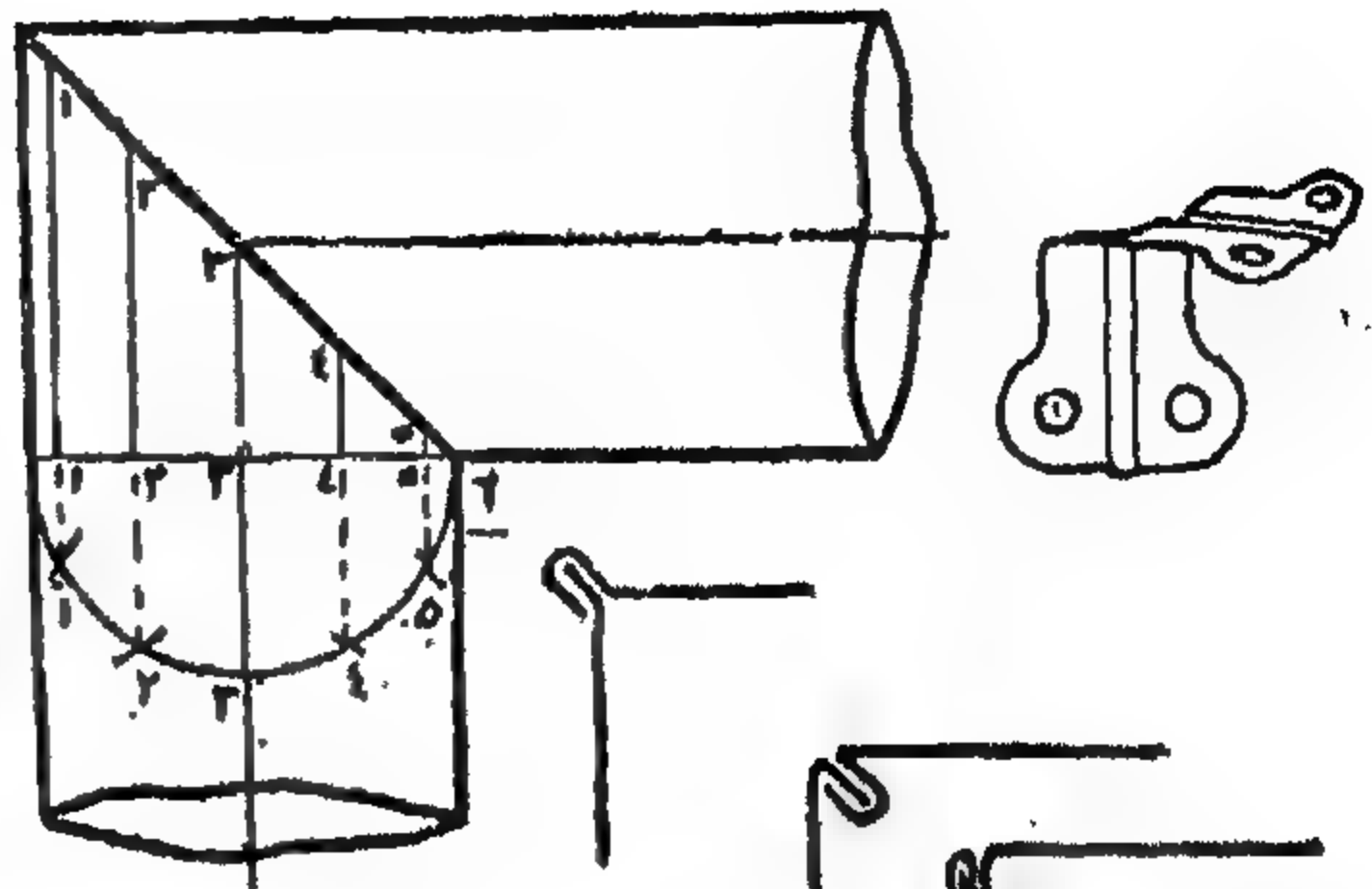


شكل (٢٦١)

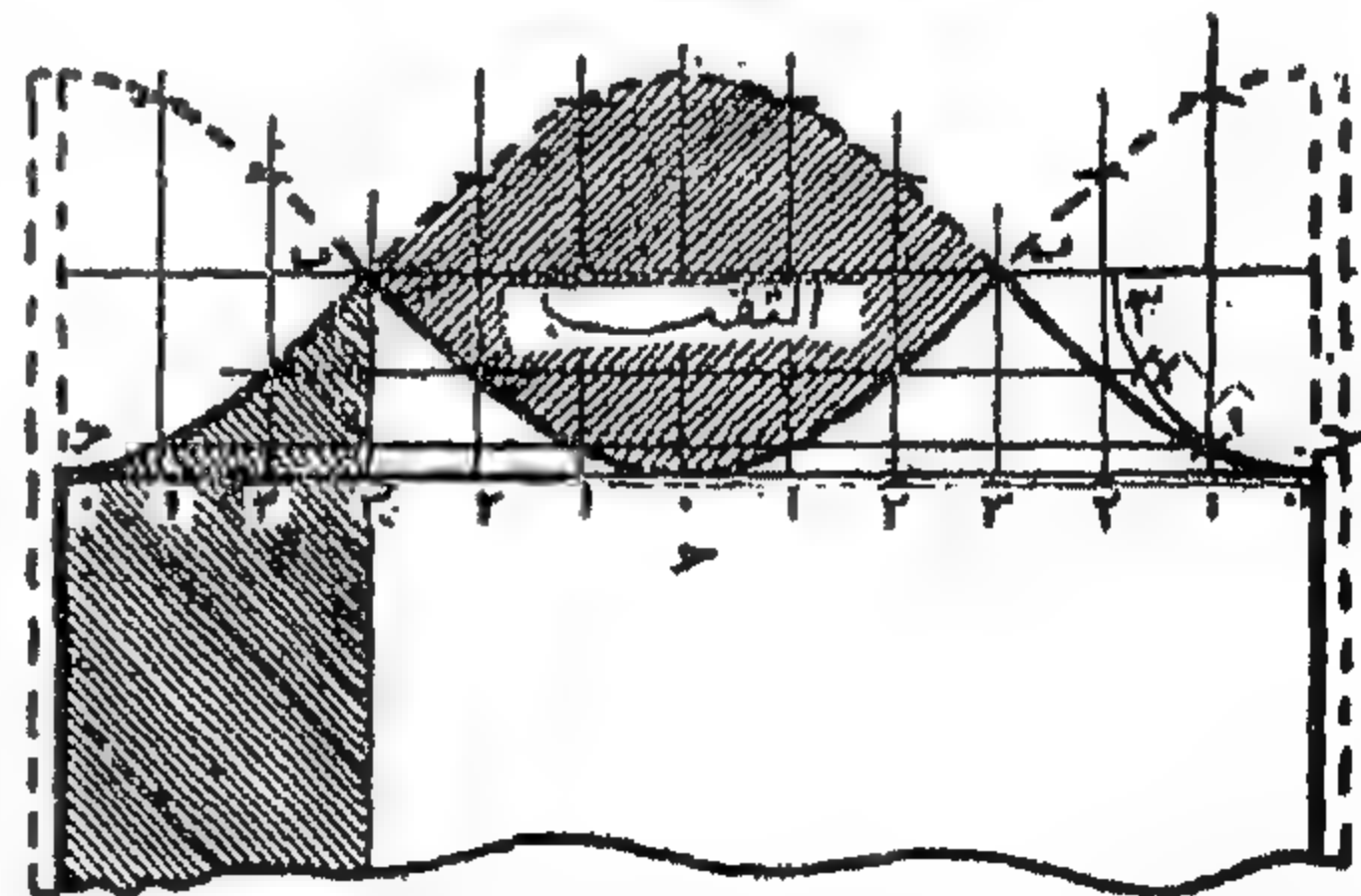
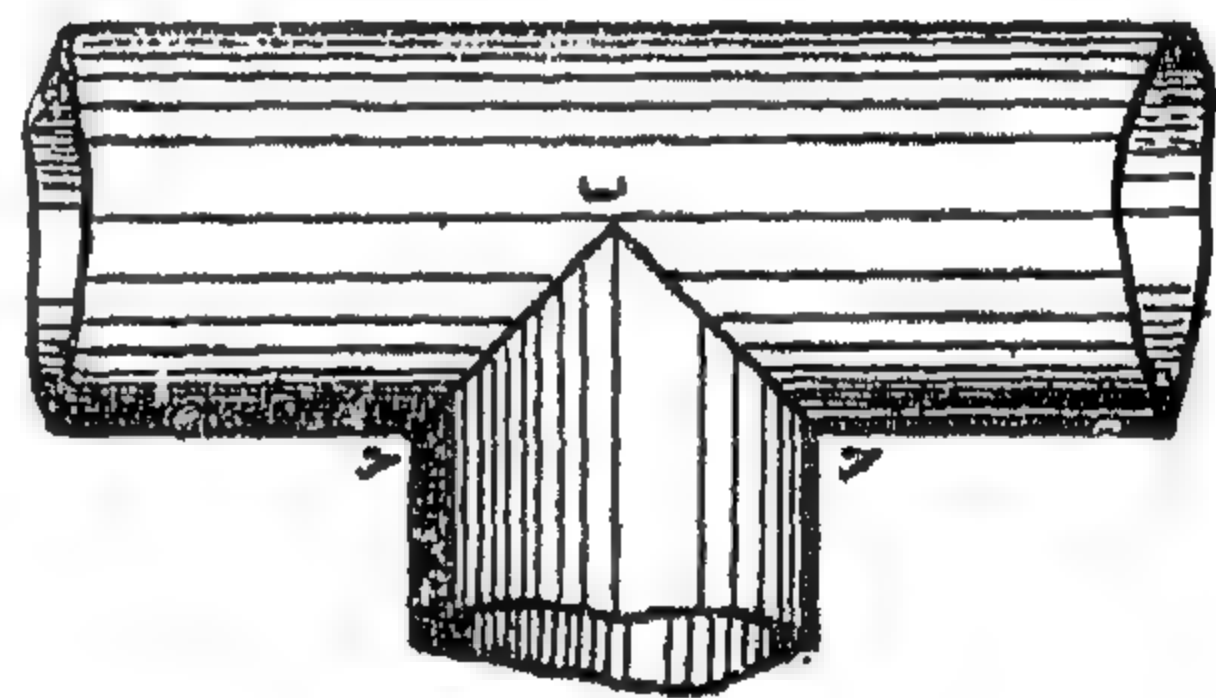
وصلة حرف T مائله لاسورة مربعة



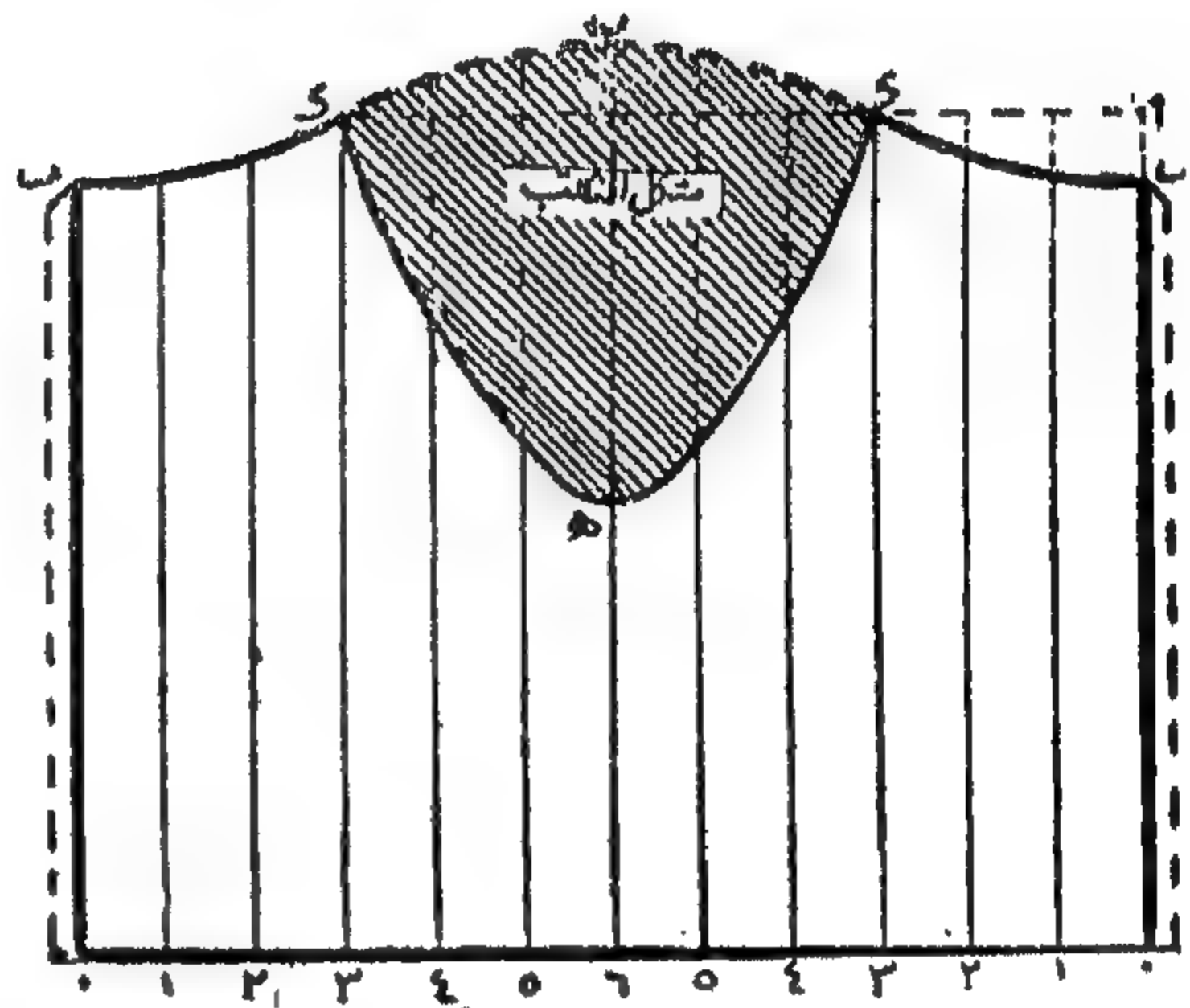
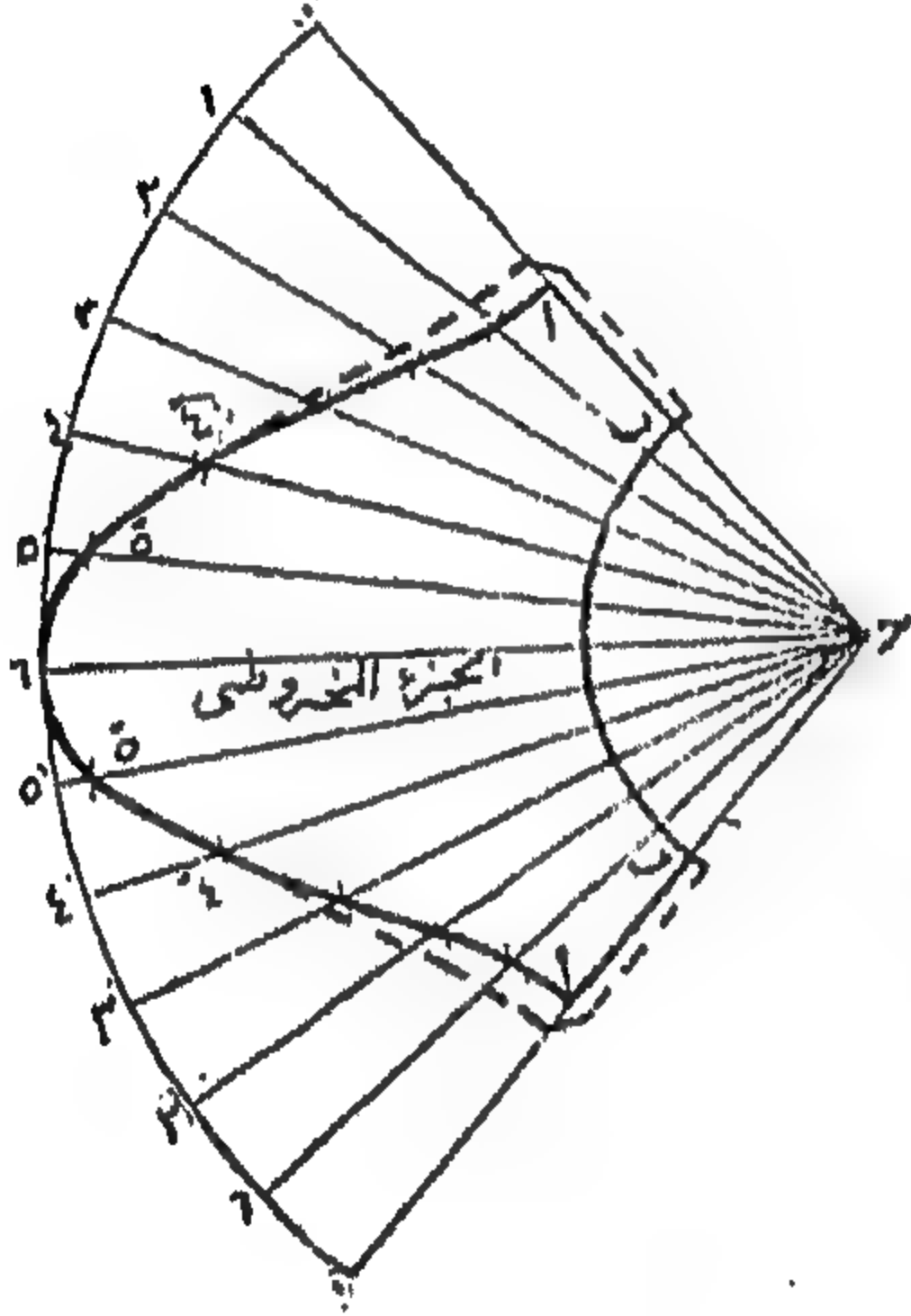
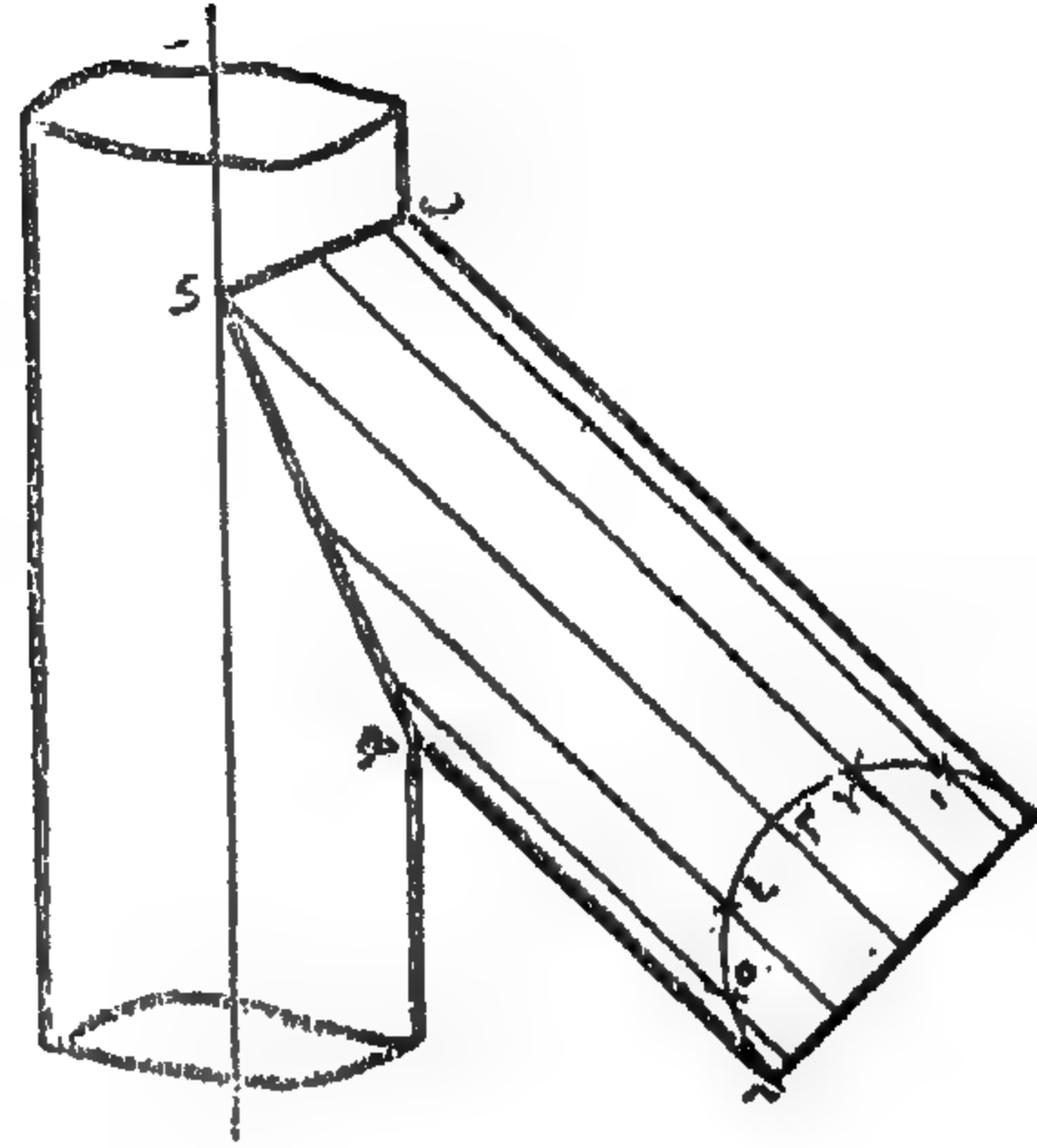
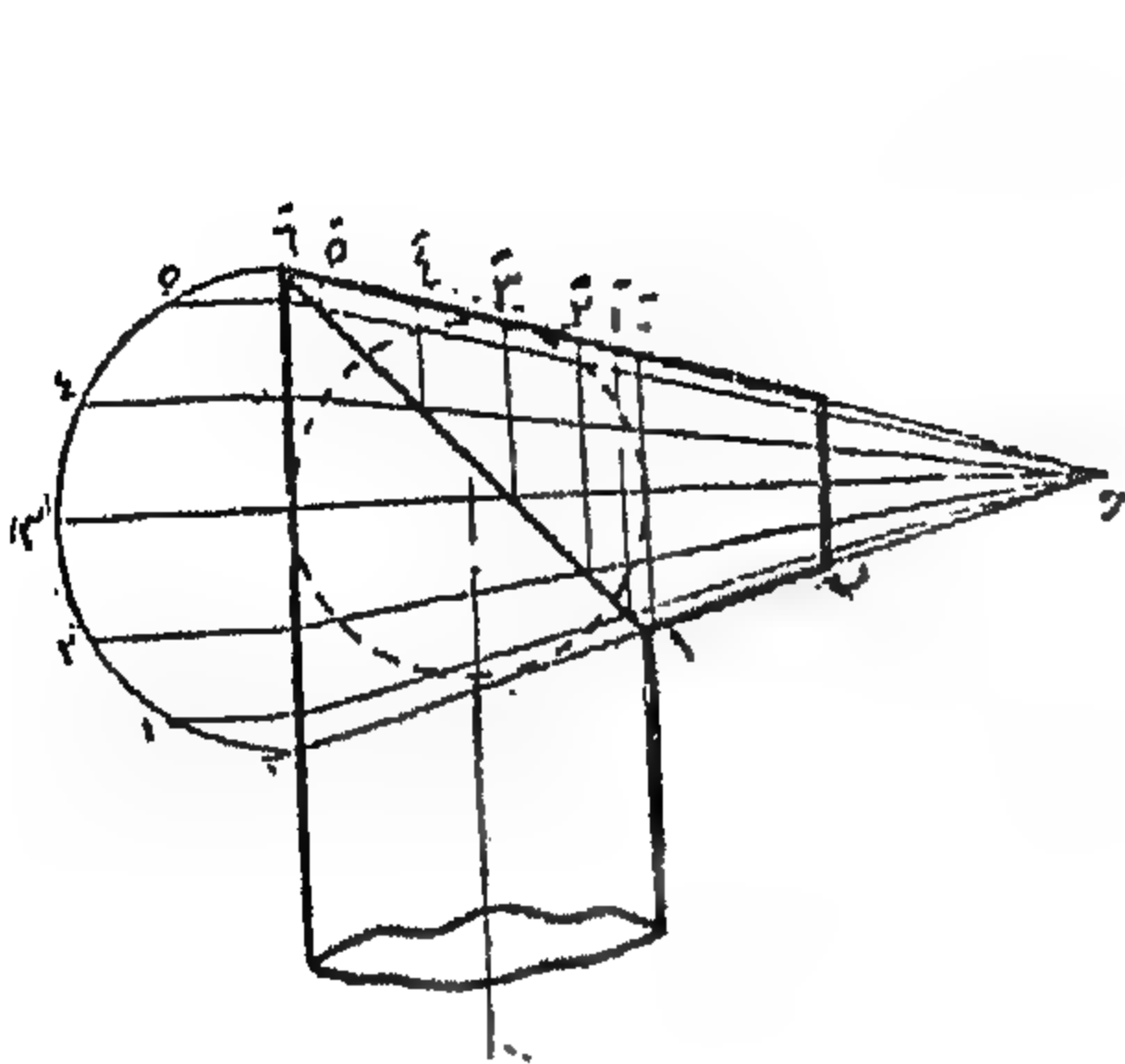
شكل (٢٦٤) وصلة ثلاثية لاسورة مستديرة  
غير متساوية الاقطار



شكل (٢٦٢) مسقط وانفراد كوع مربع من ماسورة مستديرة



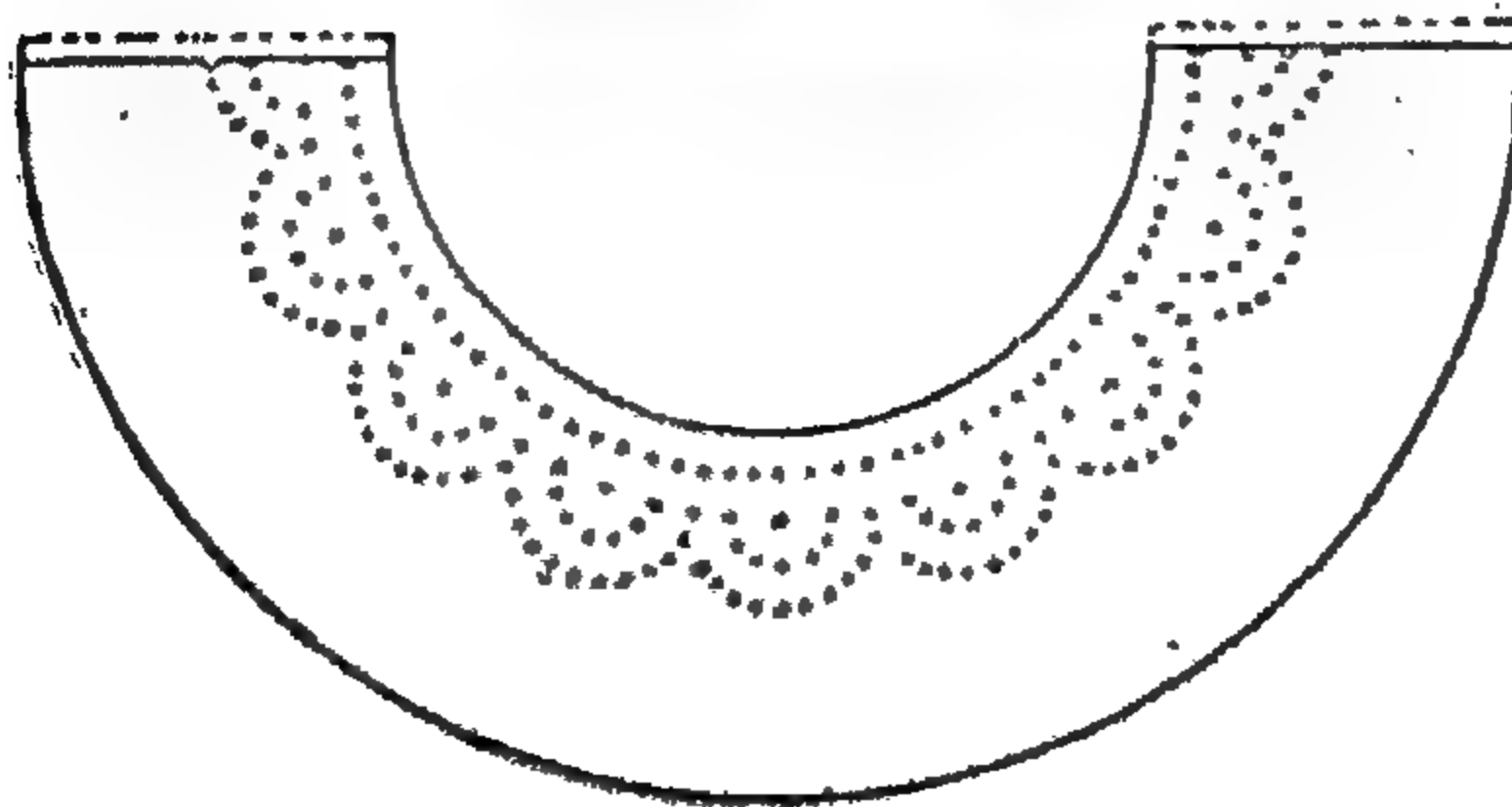
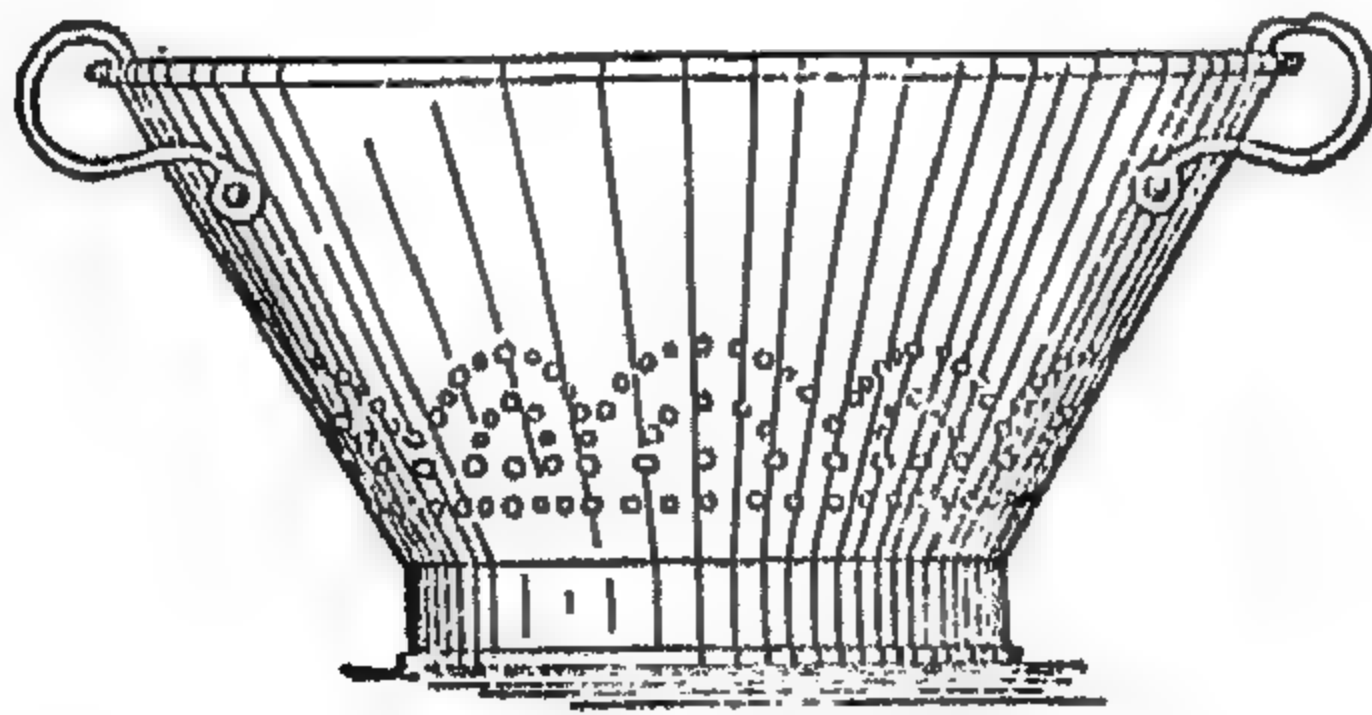
شكل (٢٦٣) مسقط وانفراد وصلة حرف T قائمة من ماسورة مستديرة



شكل (٢٦٦) انفراد كوع ماسورة مستديرة ومخروطية

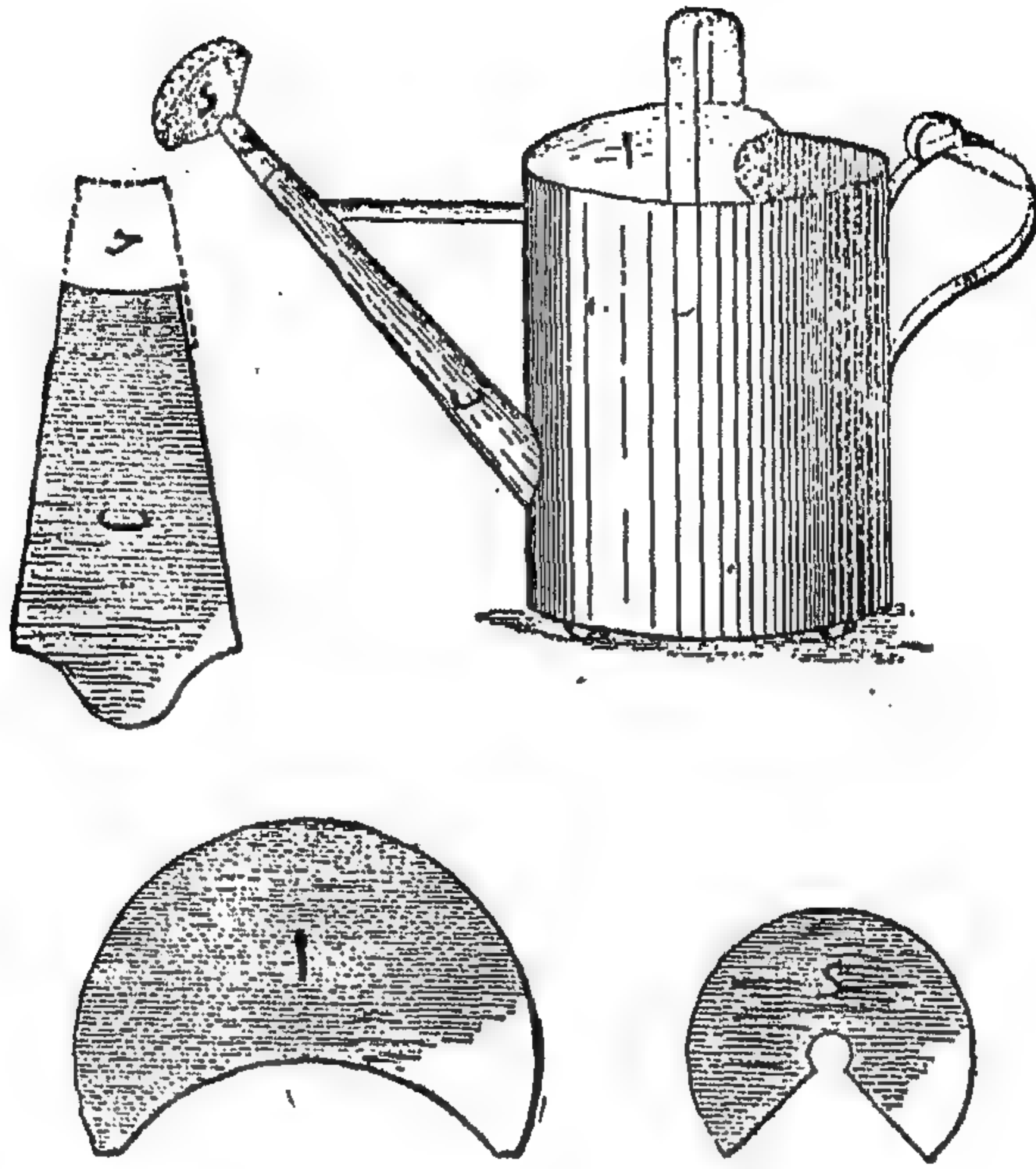
شكل (٢٦٥) مسقط وانفراد وصلة

حرف T مائلة لماسورة مستديرة

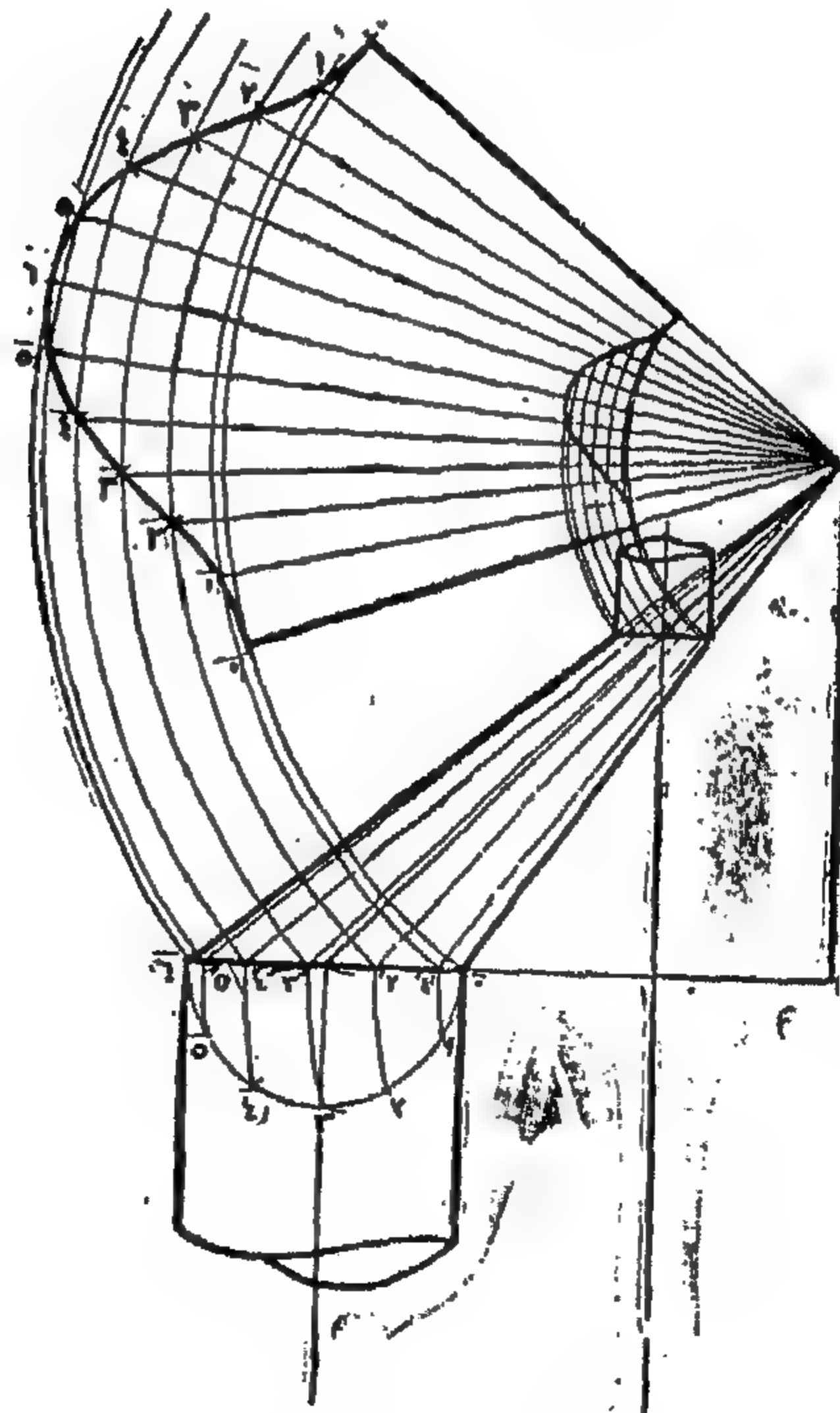


شكل (٢٦٧)  
مسقط وانفراد الجزء  
المخروطي من سلة



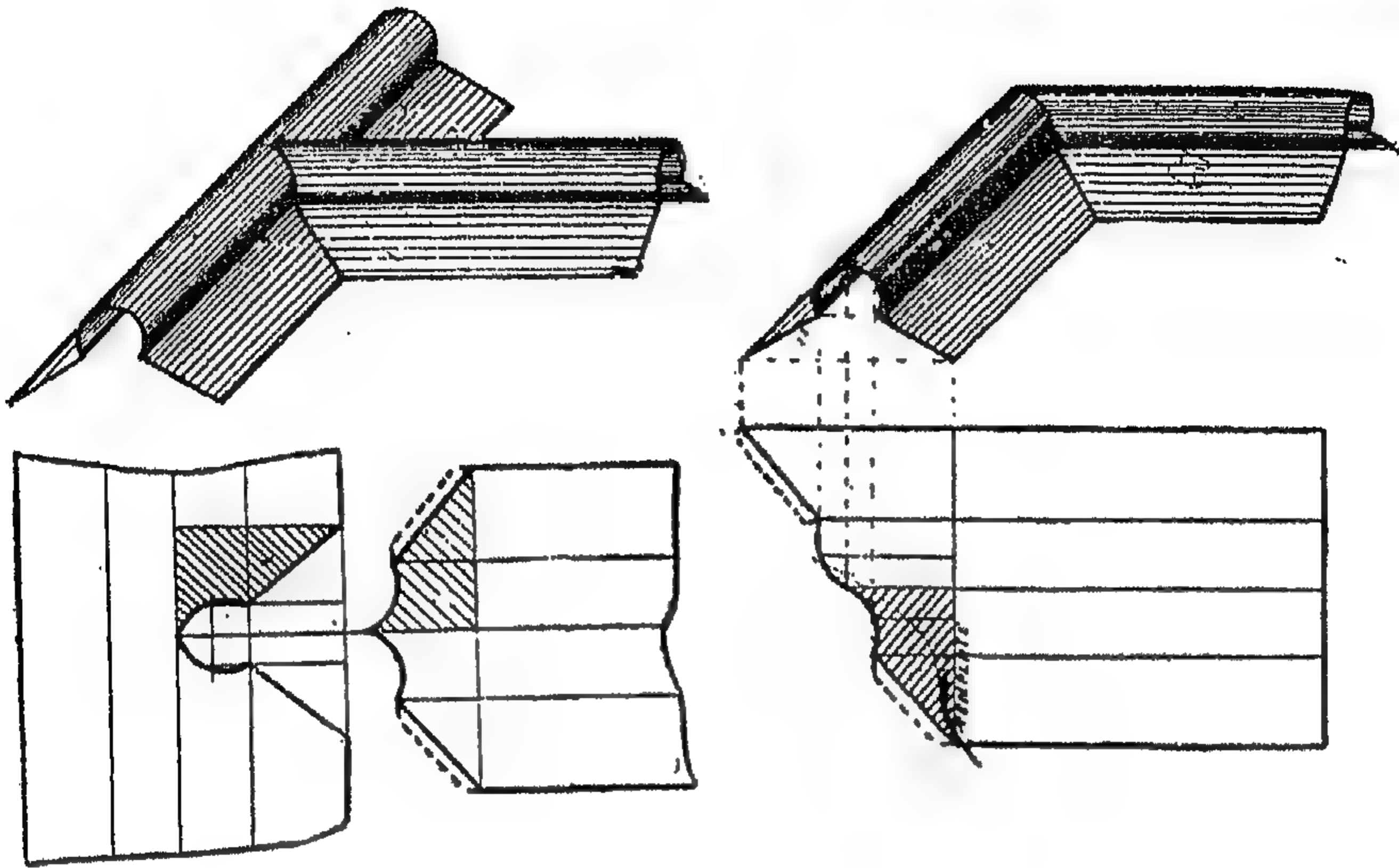


شكل (٢٦٨) منظور وانفراد رشاش ماء

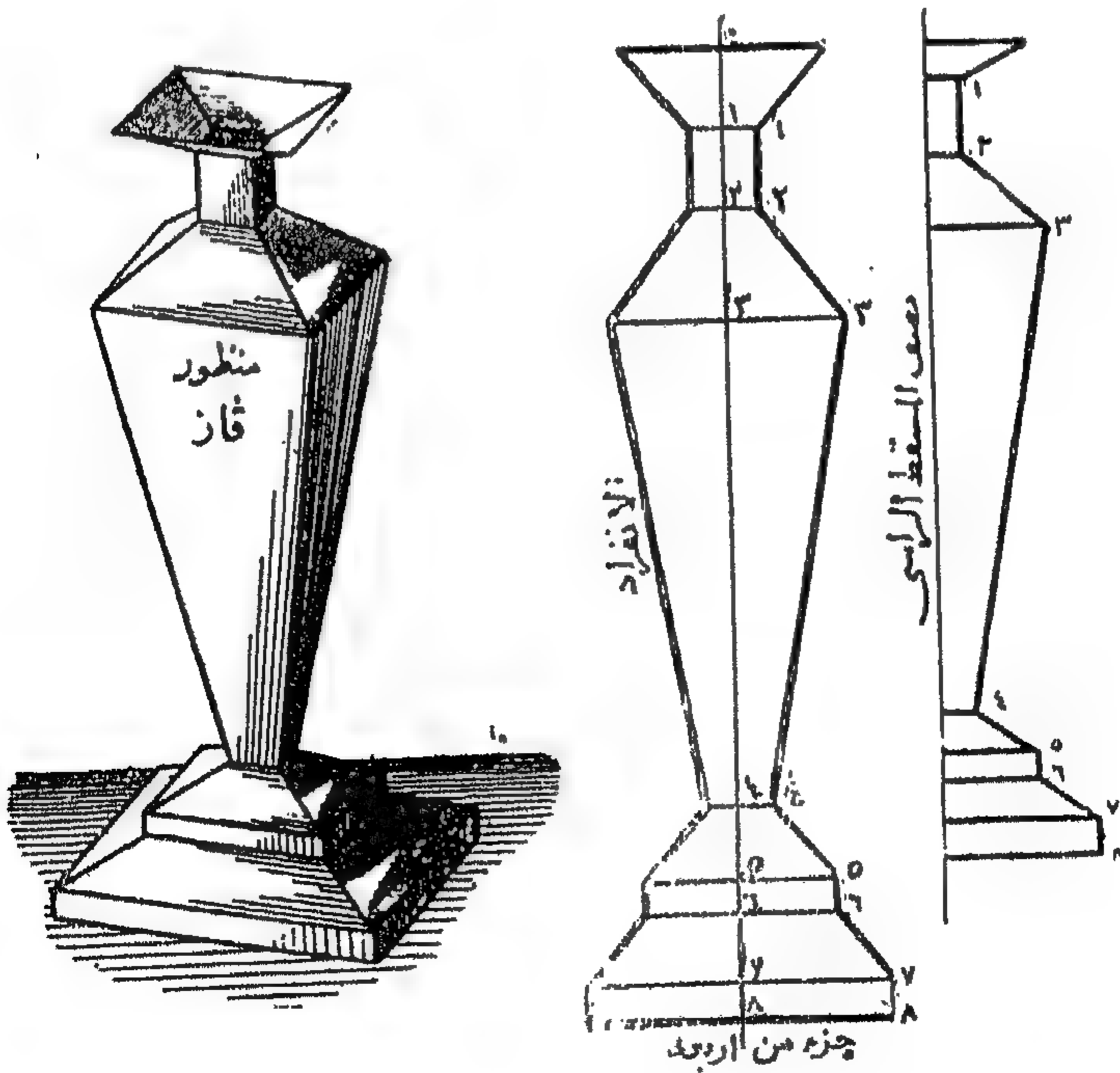


شكل (٢٦٩) انفراد الجزء المخروطي للاسورين بقطرين مختلفين متصلين ببعضهما بواسطة مخروطية

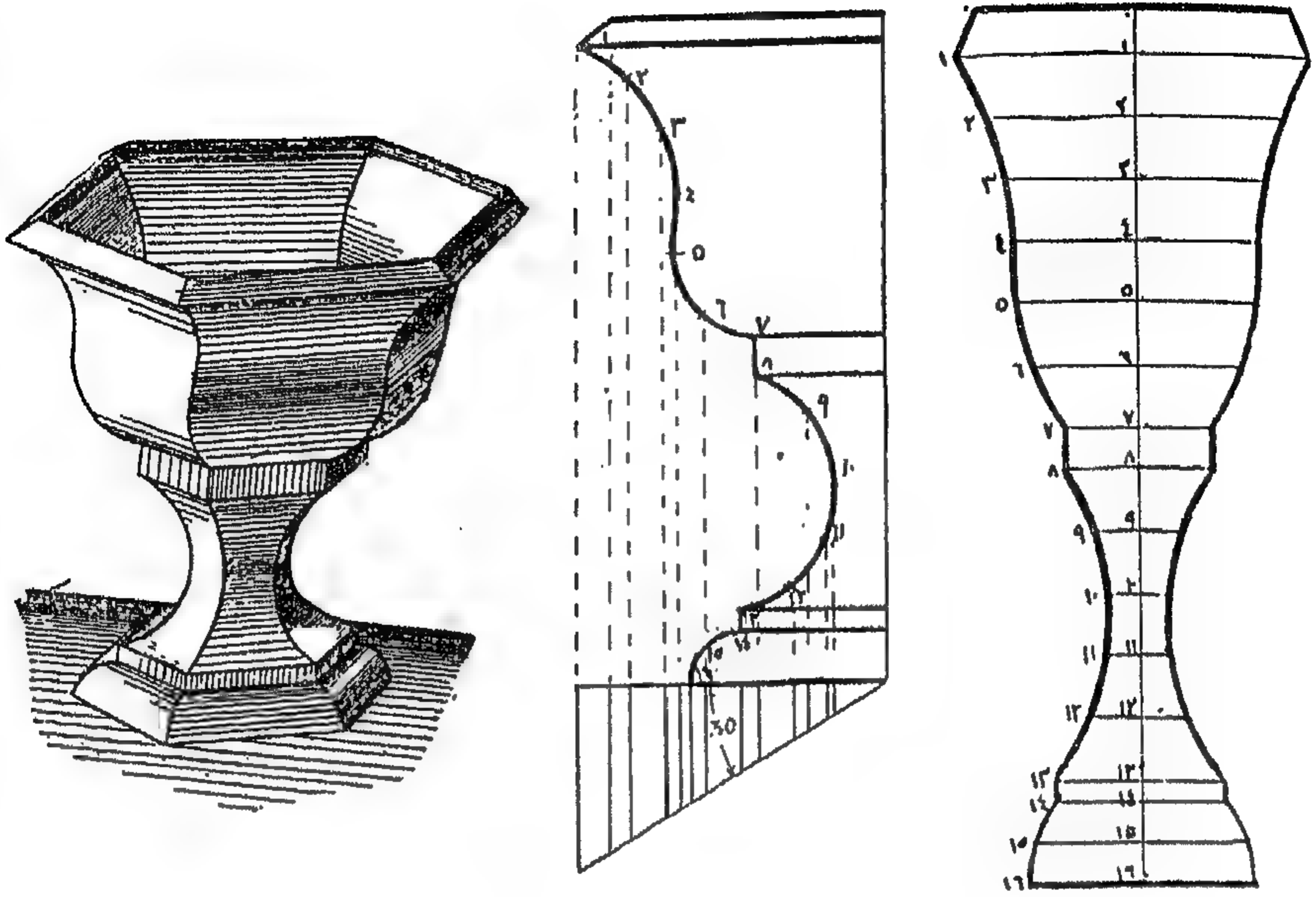




شكل (٢٧٠) انفراد وصلة مائلة لرأس سقف جمالوني      شكل (٢٧١) انفراد وصلة قائمة لرأس سقف جمالوني



شكل (٢٧٢) منظر وانفراد احد جوانب فاز للزهور



شكل (٢٧٣) منظور ومسقط وانفراد وجه من اوجه كأس

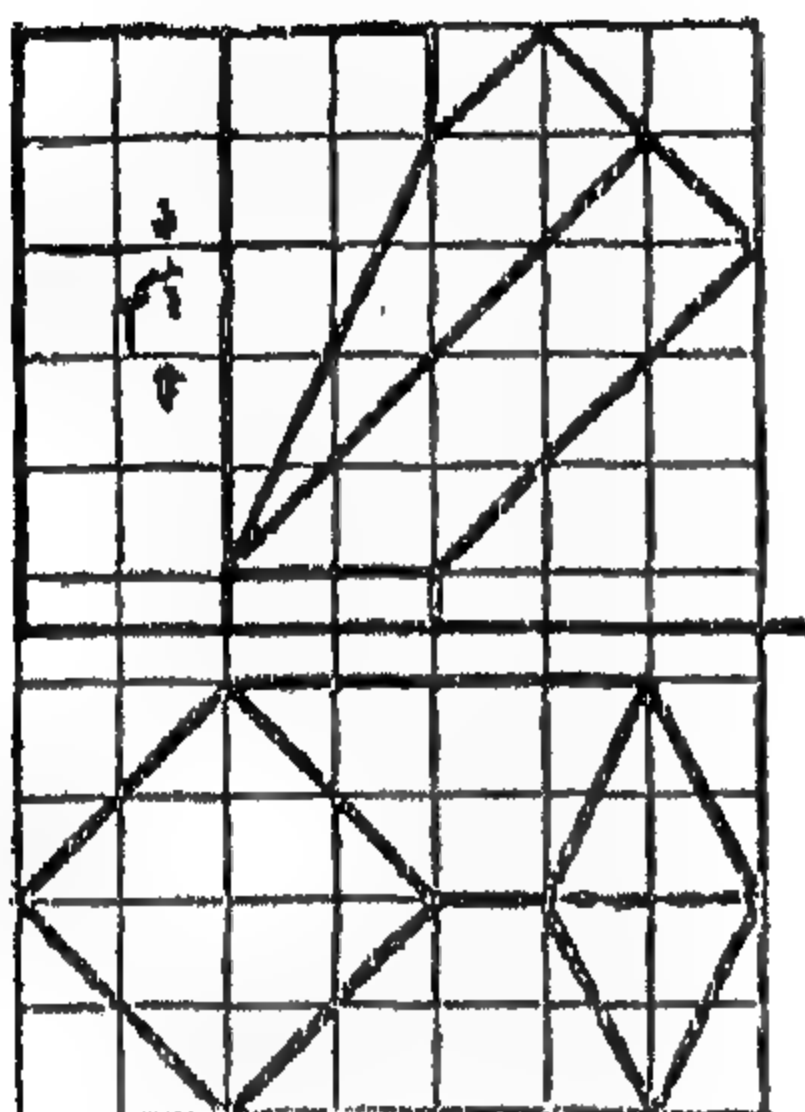
### تمهيدات (١٠)

#### على الانفرادات

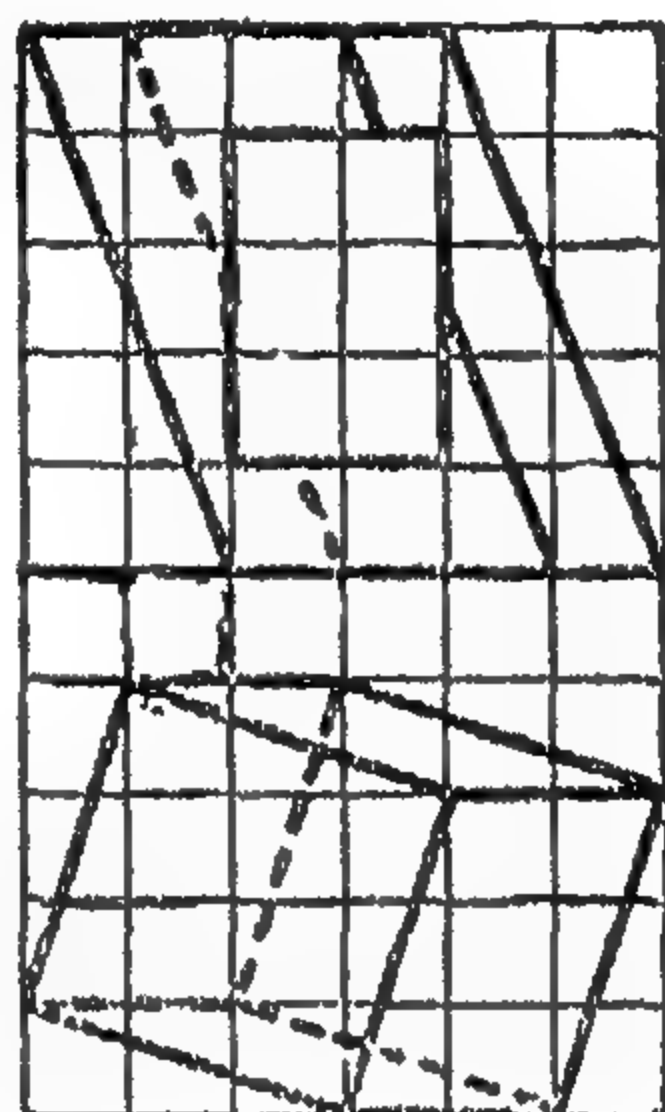
ملاحظة : خذ طول ضلع المربع في المسائل الثلاثة الاول مساويا لسنتيمتر واحد

- ( ١ ) ارسم انفراد الهرم الرباعي القائم الناقص المبين في شكل (٢٧٤)
- ( ٢ ) ارسم انفراد المنشور المائل شكل (٢٧٥) وقاعدته مربعة وبه ثقب مستطيل ظاهر على مسقطه الرأسى فقط وبين حدود الثقب على الانفراد
- ( ٣ ) ارسم انفراد كل منشور من المنشورين المتقاطعين في شكل (٢٧٦)
- ( ٤ ) ارسم انفراد اجزاء وصلة المواسير المبينة بشكل (٢٧٧)
- ( ٥ ) شكل (٢٧٨) يبين المسقط الرأسى لاسطوانة مقطوعة بقطاع مستو مائل وقطاع دائرى كما هو موضح بالرسم والمطلوب رسم انفرادها
- ( ٦ ) ارسم انفراد المخروط المقطوع المبين بشكل (٢٧٩)
- ( ٧ ) ارسم انفراد الوصلة المخروطة المبينة بشكل (٢٨٠)

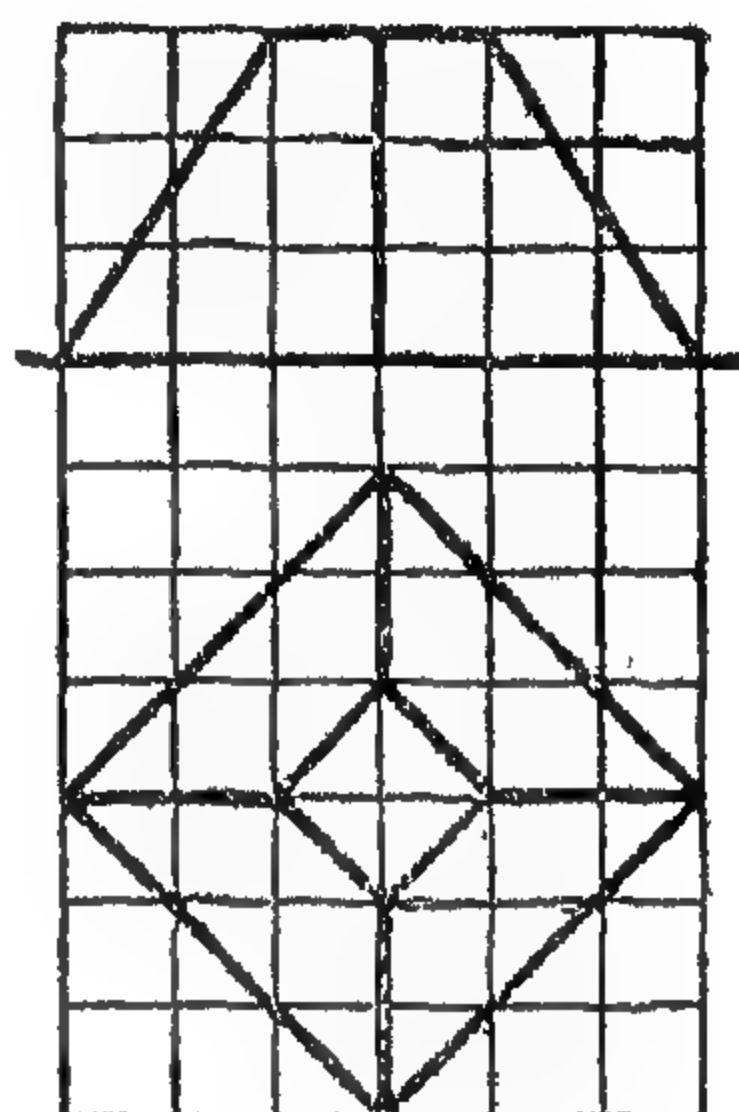
( ٨ ) ارسم انفراد الوصلة المبينة بشكل ( ٢٨١ )  
 ( ٩ ) ارسم انفراد الاشكال المبينة من ( ٢٨٢ ) الى ( ٢٨٧ ) .



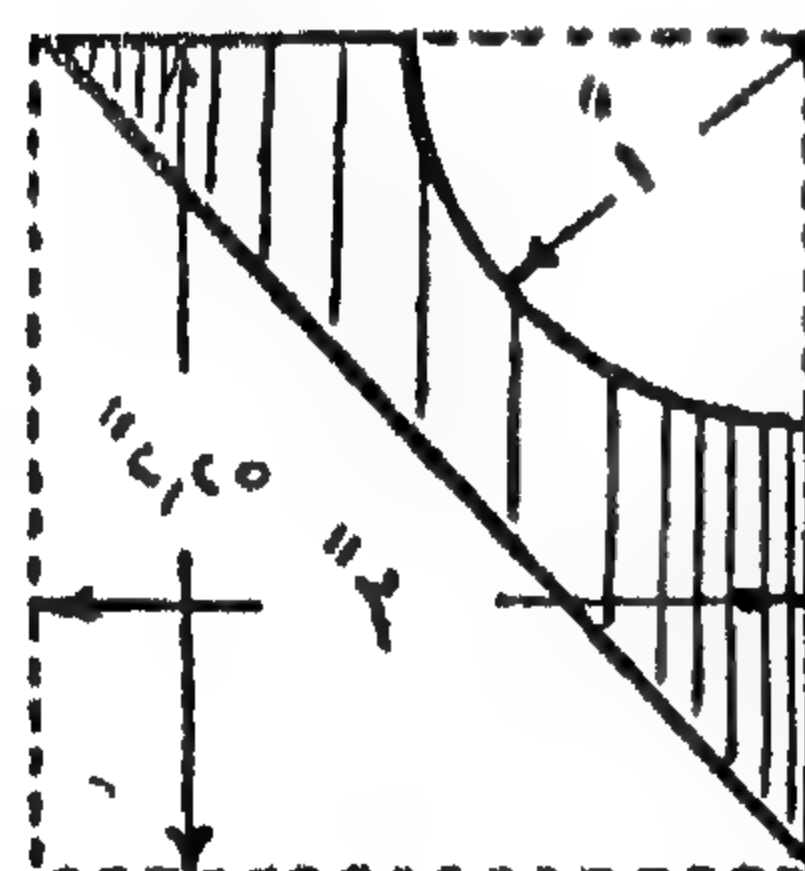
شكل ( ٢٧٦ )



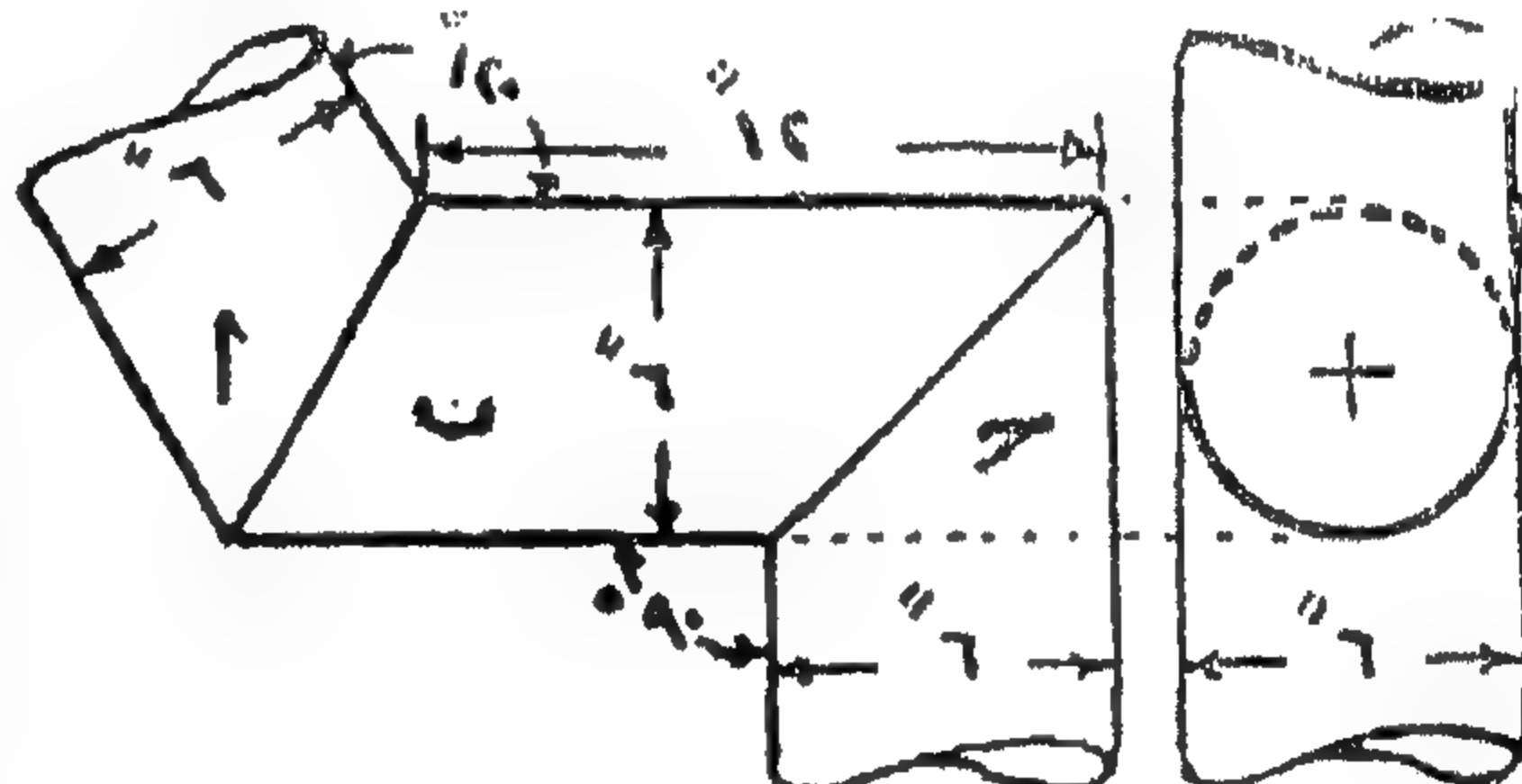
شكل ( ٢٧٥ )



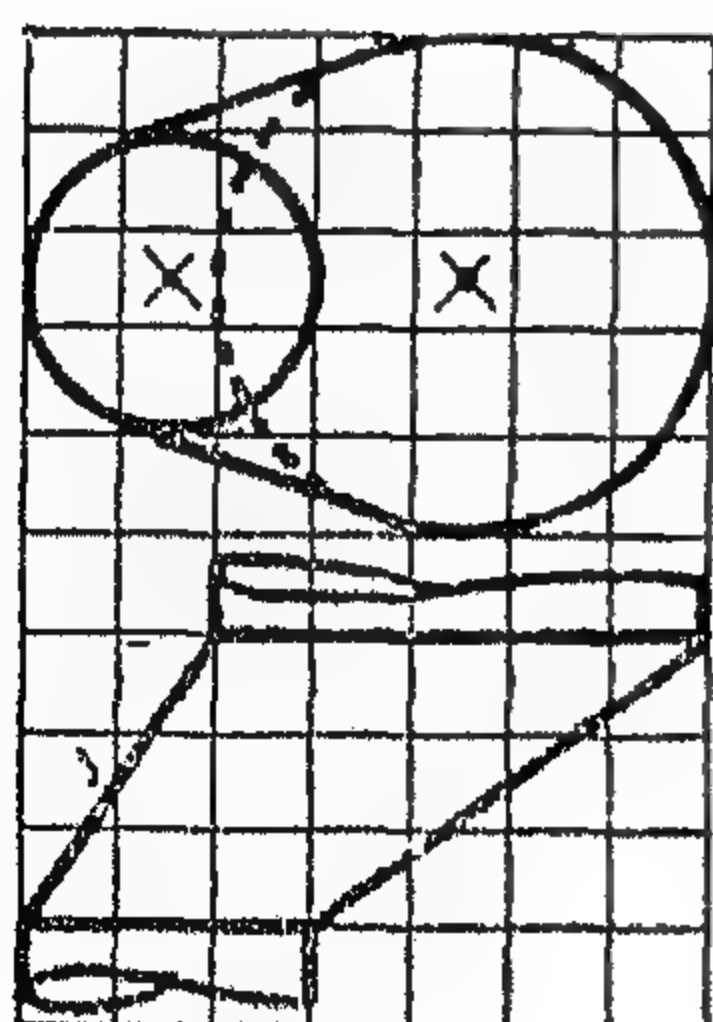
شكل ( ٢٧٤ )



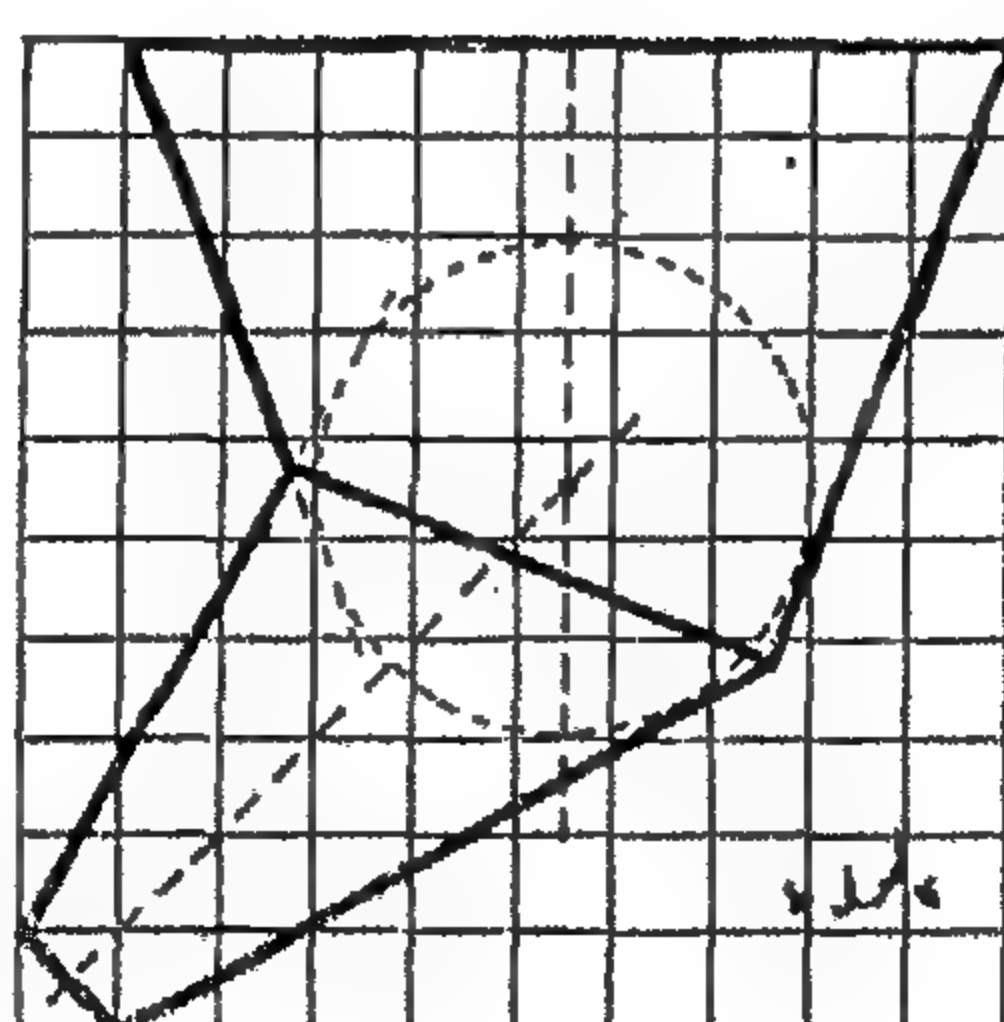
شكل ( ٢٧٨ )



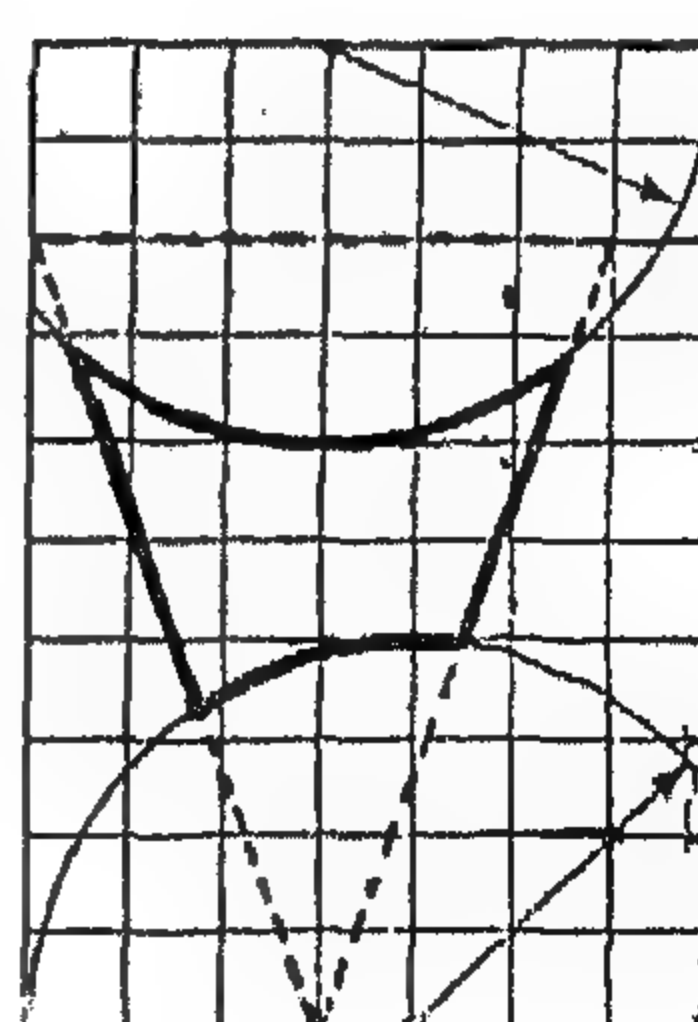
شكل ( ٢٧٧ )



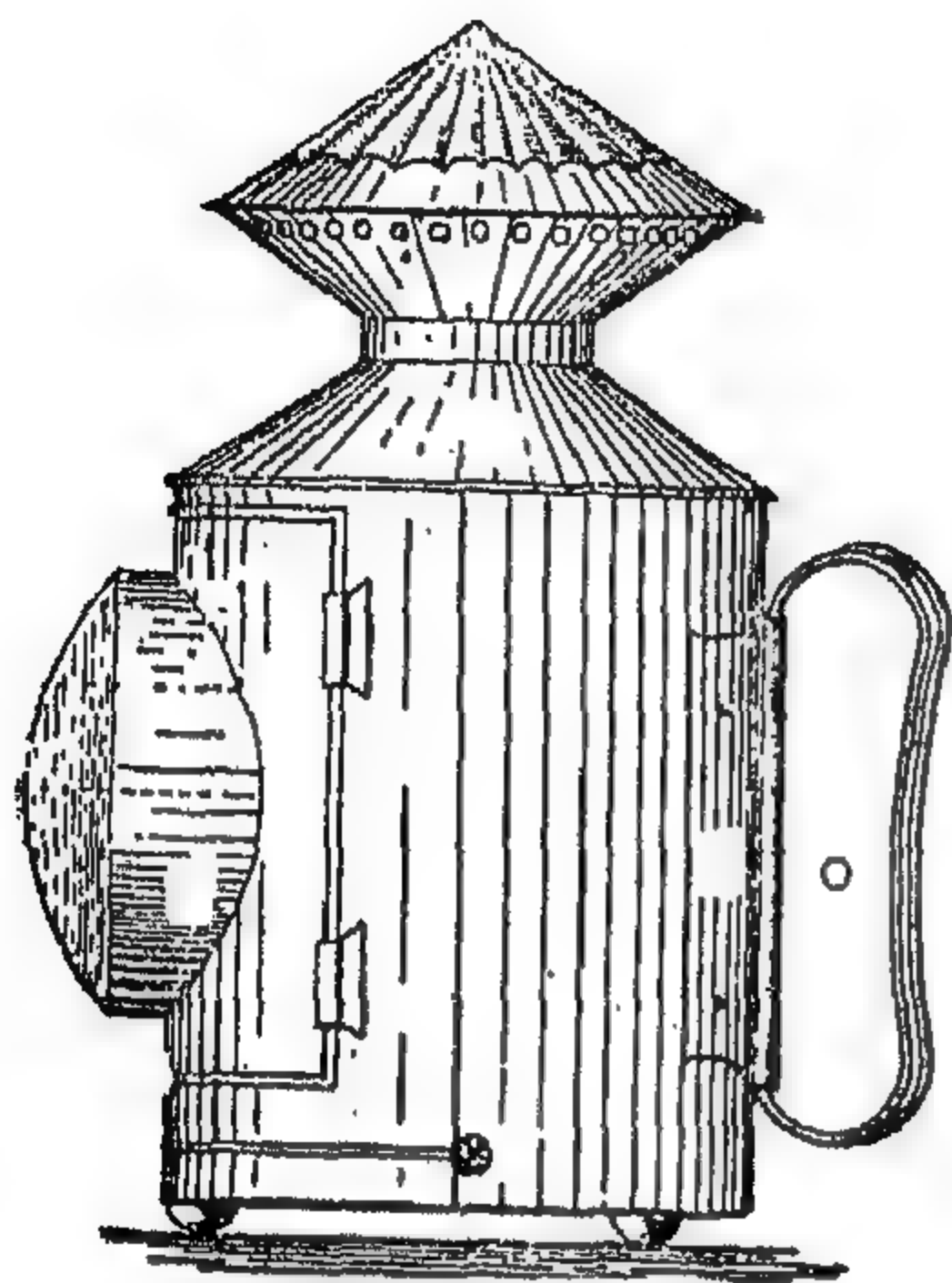
شكل ( ٢٨١ )



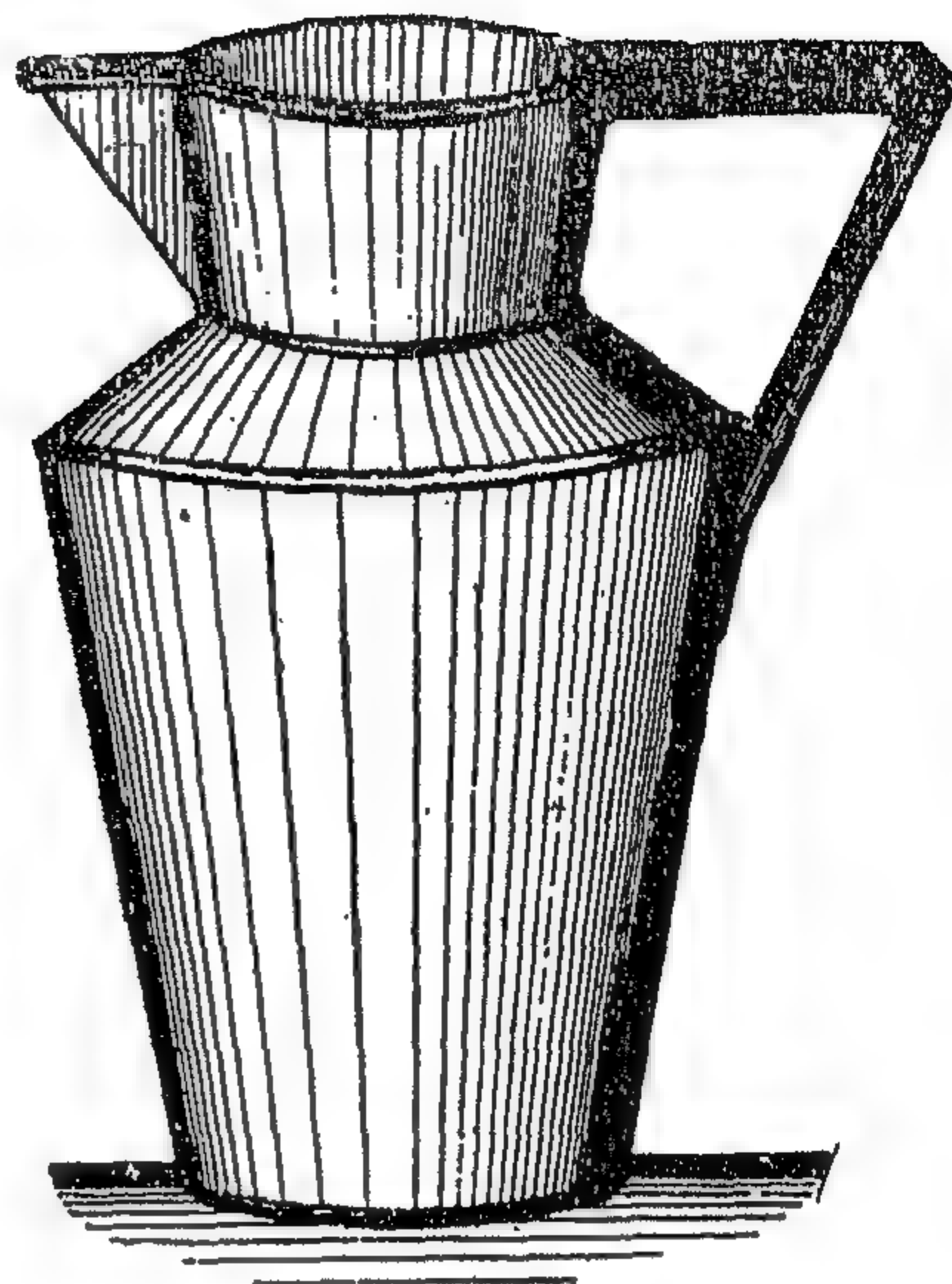
شكل ( ٢٨٠ )



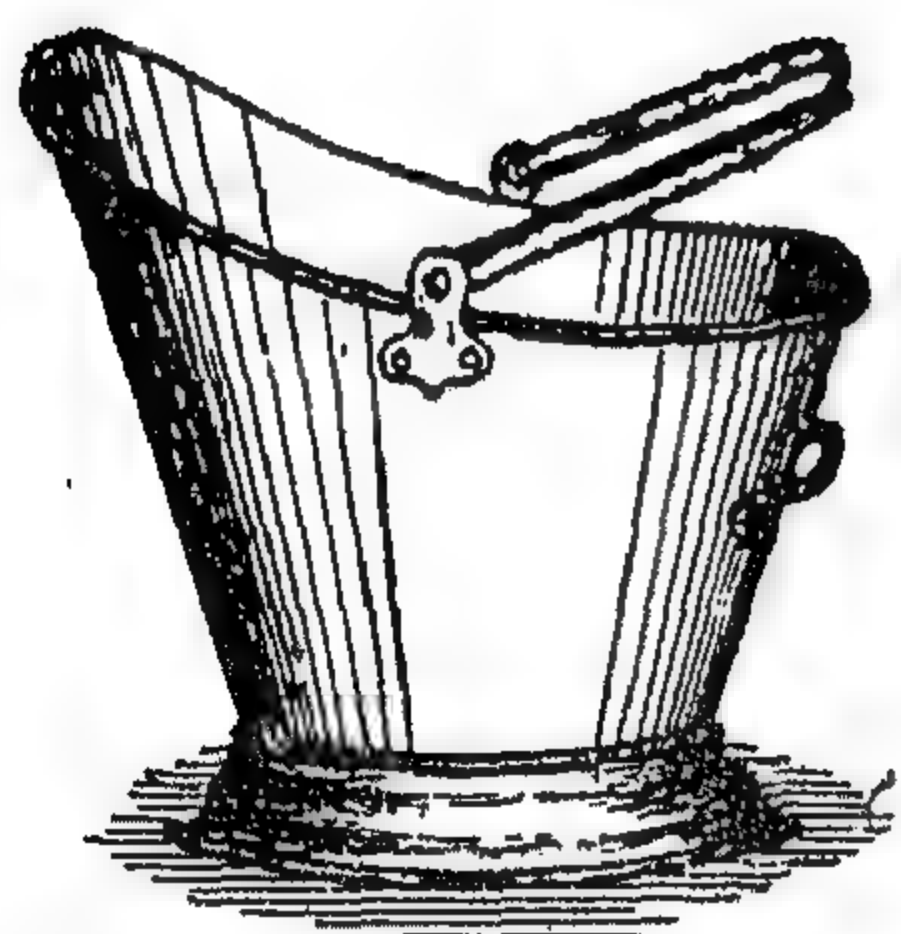
شكل ( ٢٧٩ )



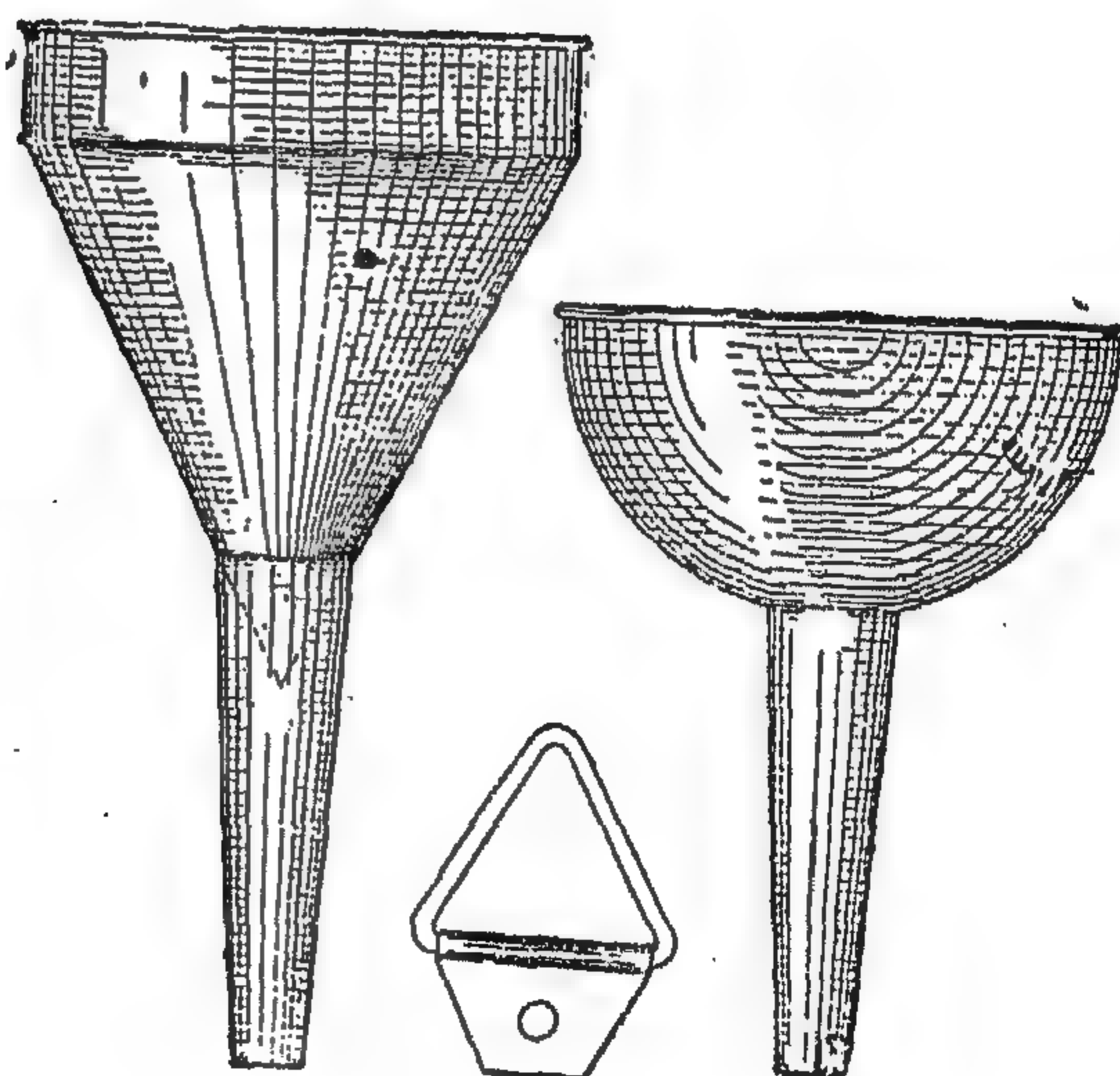
شکل (۲۸۳)



شکل (۲۸۲)

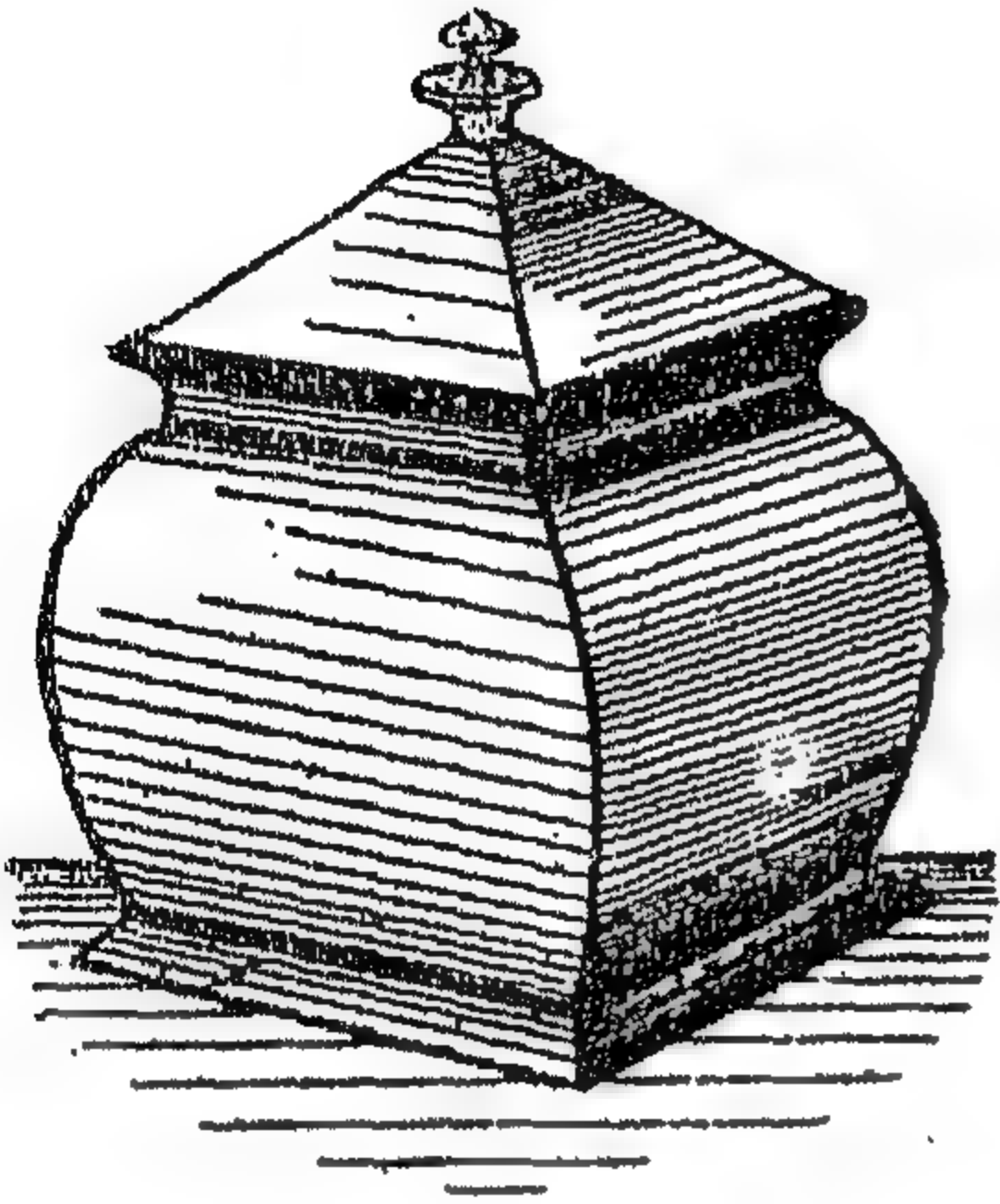


شکل (۲۸۵)

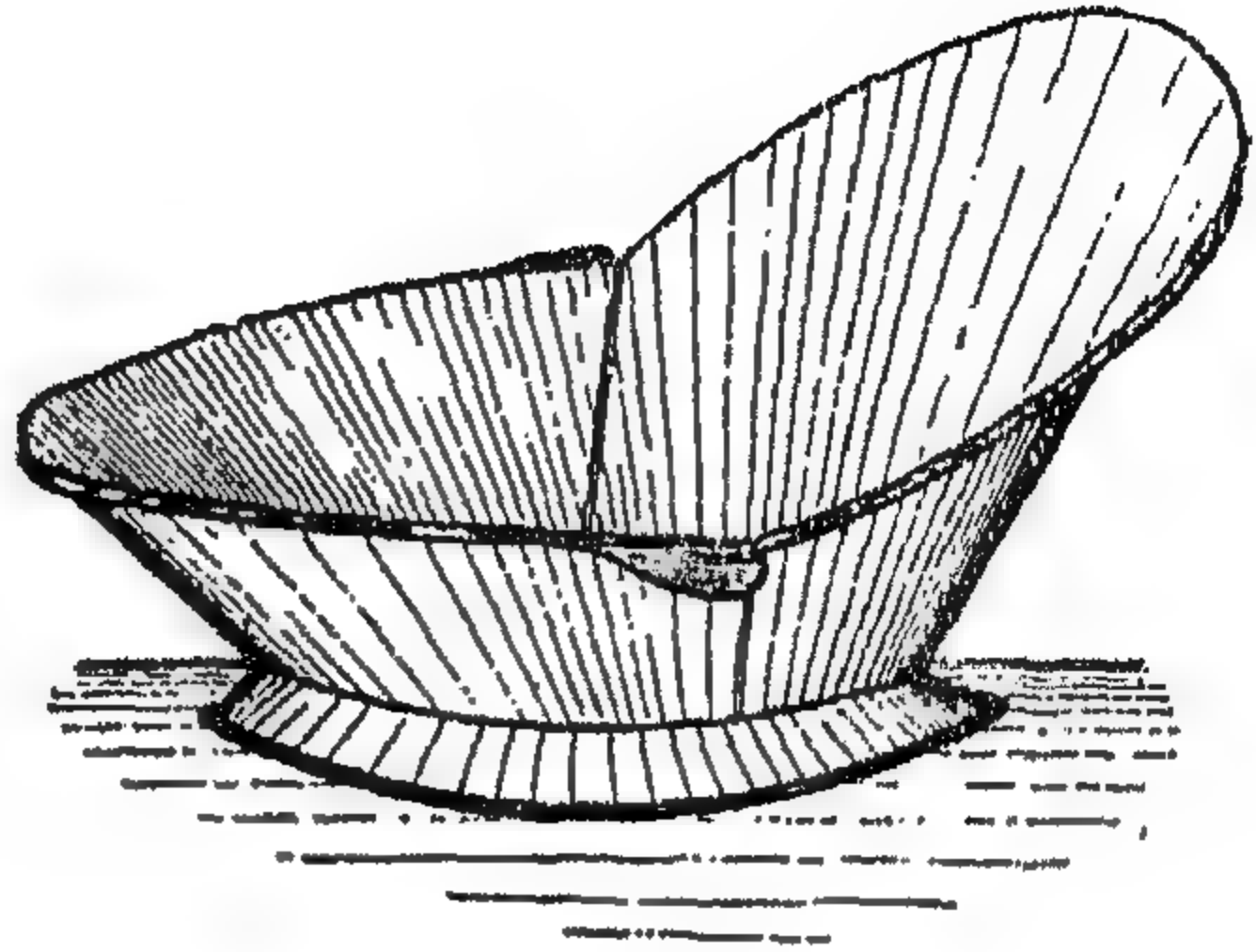


شکل (۲۸۴)





شكل (٢٨٧)



شكل (٢٨٦)

## الفصل الحادى عشر

### فى تقاطع السطوح

بند ٣٩ — الطريقة العامة لإيجاد تقاطع سطحين ببعضهما

المفروضه : السطحان  $A$  و  $B$

والمطلوب إيجاد تقاطع كل منهما مع الآخر

العمل :- نقطع كل من السطحين  $A$  و  $B$  بمستوي ثالث مثل  $h$  وننتخب المستوى الاخير بحيث يكون تقاطعه مع كل من  $A$  و  $B$  خطوط مستقيمة أو دوائر يسهل رسمها فاذا تقاطع  $h$  مع  $A$  فى الخط  $d$  ومع  $B$  فى الخط  $e$  فنقطة تقابل الخط  $d$  بالخط  $e$  تقع على خط تقاطع السطحين ويتحرك المستوى  $h$  الى عدة مواضع يمكن تكوين خط تقاطع السطحين  $A$  و  $B$  المطلوب

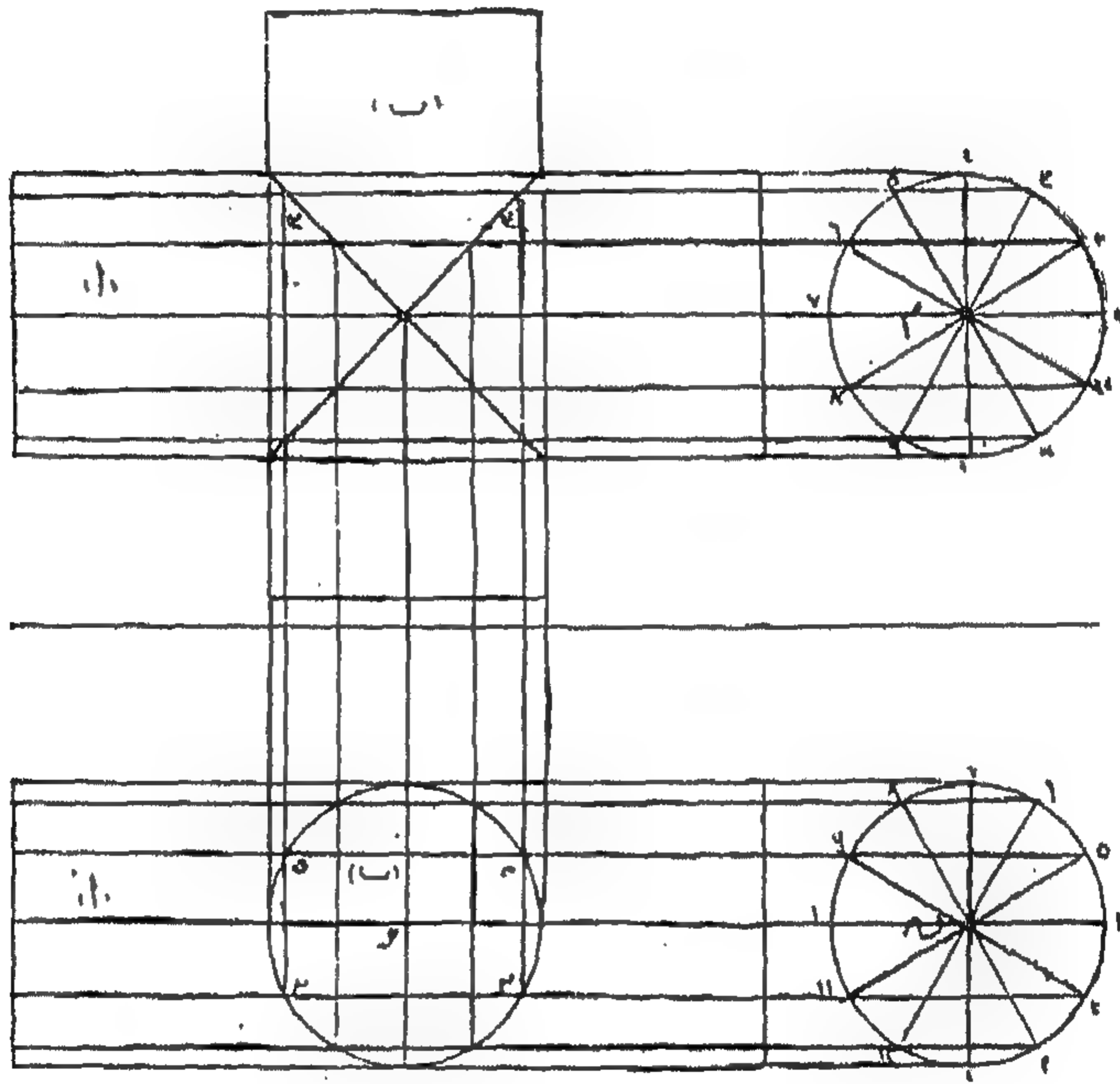
وحيث ان السطوح فى الغالب هى ما متحد اجساما فعند اختراق جسم بآخر يتقاطع سطوح أحدهما بسطوح الآخر وينتج عن ذلك خطوط مستقيمة أو منحنية



أو مركبة حسب نوع الجسمين المتقاطعين وسنذكر فيما يلي عدة أجسام تحترق بعضها  
مثلى فى أمثلة متنوعة

مثال

المفروضه : المسقطان الرأسى والافقى لاسطوانتين متقاطعتين فى  
متساويتين فى القطر ومحوراهما متعامدين ومتقابلين شكل (٢٨٨)



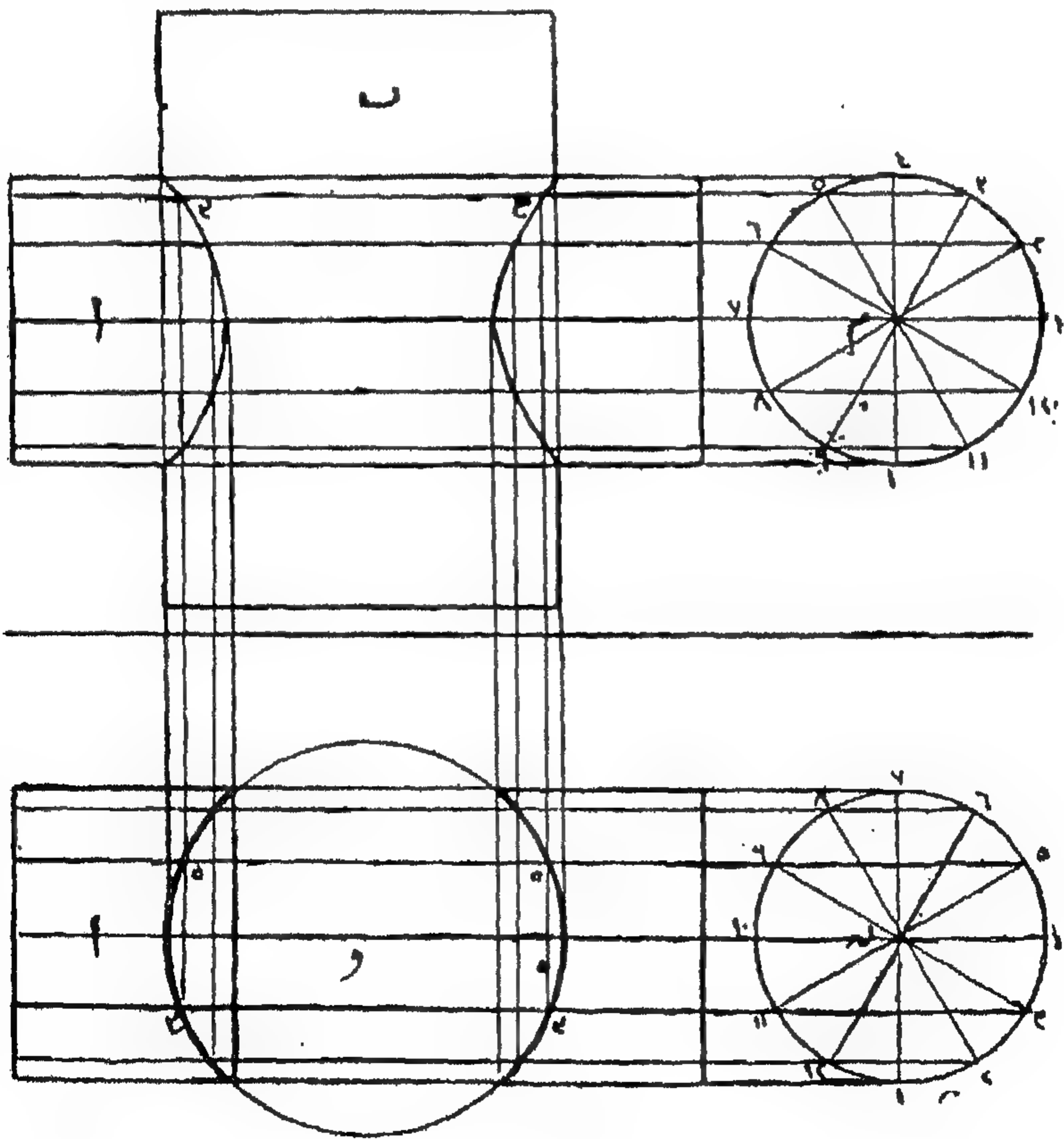
شكل ( ٢٨٨ )

والطوب : اظهار خطوط تقاطع سطحى الاسطوانتين المذكورتين ببعضهما  
على مسقطيهما

العمل : نرسم الدائرة م وهى المسقط الجانبي للاسطوانة ا وكذا الدائرة ن  
وهى المسقط الافقى الجانبي للاسطوانة ا ونقسم كل من الدائرتين الى عدة أقسام  
متساوية واتكن اثنى عشر كما بالشكل ونسعى نقط التقاسيم من ١ الى ١٢ وهذه  
النقط الاثنى عشر تعتبر مساقط جانبية لعدة رواسم فى الاسطوانة ا

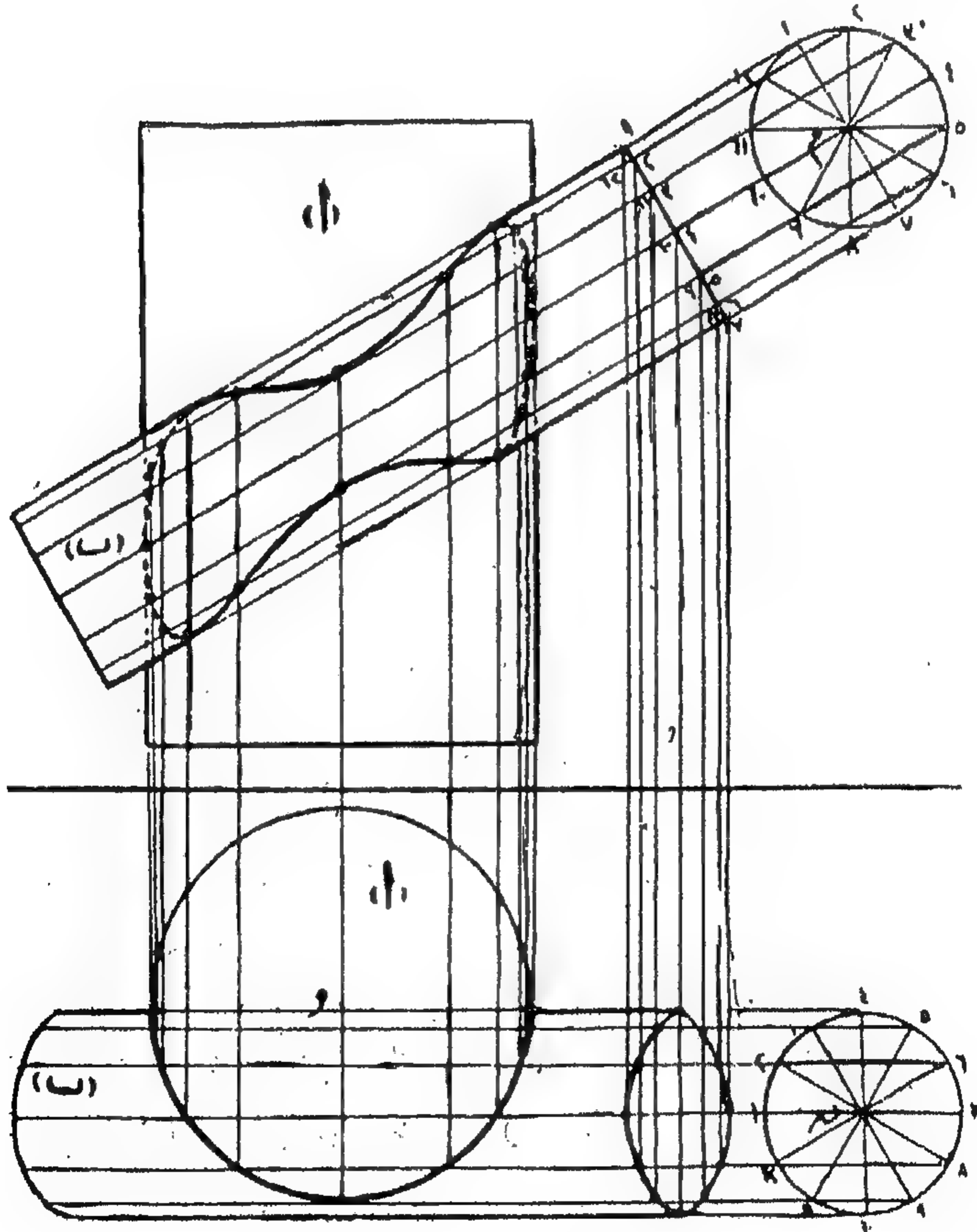
ثم تقطع الاسطوانتين بمستو ثالث عمودي على محور الاسطوانة ب ومواز لمحور الاسطوانة ا ونجعله يتحرك موازيا لنفسه اعلا واسفل محور الاسطوانة ا ففي كل وضع من اوضاعه يقطع الاسطوانة ب في دائرة مسقطها الافقى هو الدائرة و ويقطع الاسطوانة ا في راسمين يتوقف البعد بينهما على وضع المستوى القاطع بالنسبة لمحور الاسطوانة ا ويتغير هذا البعد من الصفر عندما يكون المستوى القاطع في اعلا وضع له (وعنده يمس الاسطوانة ا) الى ان يصير مساويا لقطر الاسطوانة عندما يمر بمحورها

فاذا كان في وضع بحيث يمر بالنقطتين ٣ و ٥ بالنسبة للدائرة م فانه يقطع الاسطوانة ا في راسمين مسقطهما الرأسى هو امتداد الخط ٣ — ٥ ومسقطاهما الافقيين هما المستقيمان المرسومان من ٣ و ٥ على التوالي بالنسبة للدائرة ن وموازيان



( شكل ٢٨٩ )

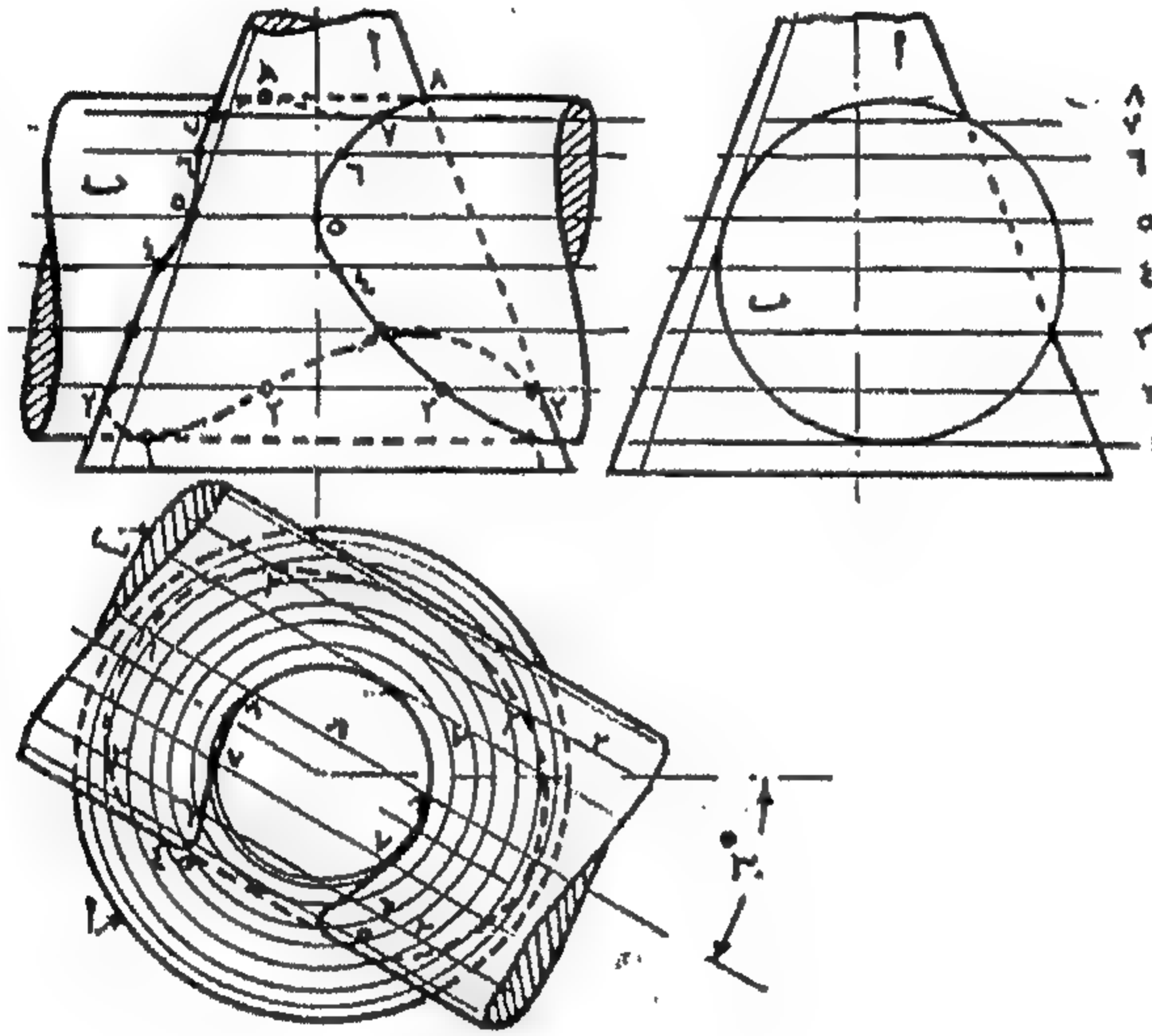
محور الاسطوانة ١ يقطعان الدائرة وفي المسقط الافقى في أربع نقط تقع على المسقط الافقى لخطوط التقاطع يمكن إيجاد مساقطها الرأسية الواقعة على المسقطين الرأسين للرأسين وهما على امتداد ٣ و ٥ في المسقط الرأسى وهكذا يتحرك المستوى القاطع يمكن إيجاد عدة نقط على خطوط التقاطع حتى يتكون تقاطع الاسطوانة ويجب الالتفات بنوع خاص في هذه الحالة الى ثلاث مواضع للمستوى القاطع مهمة في تكوين التقاطع وهى عندما لمس الاسطوانة ١ من أعلى ومن أسفل وعندما يمر بمحورها والموضعين الاولين يحددان نهاية خطوط التقاطع والموضع الثالث يحدد نقط تقابل خطوط التقاطع كما هو مبين في الشكل



(شكل ٢٩٠)

وشكل (٢٨٩) يبين طريقة إيجاد تقاطع اسطوانتين مختلفتين في القطر ومحوراهما متعامدين

وشكل (٢٩٠) يبين تقاطع اسطوانتين مختلفتي القطر ومائلين ويلاحظ في الاشكال الثلاثة السابقة ان يكون مركزا الدائرتين م و ن على امتداد محور الاسطوانة ا  
وشكل (٢٩١) يبين تقاطع اسطوانة افقية بمخروط قائم غير ان محور

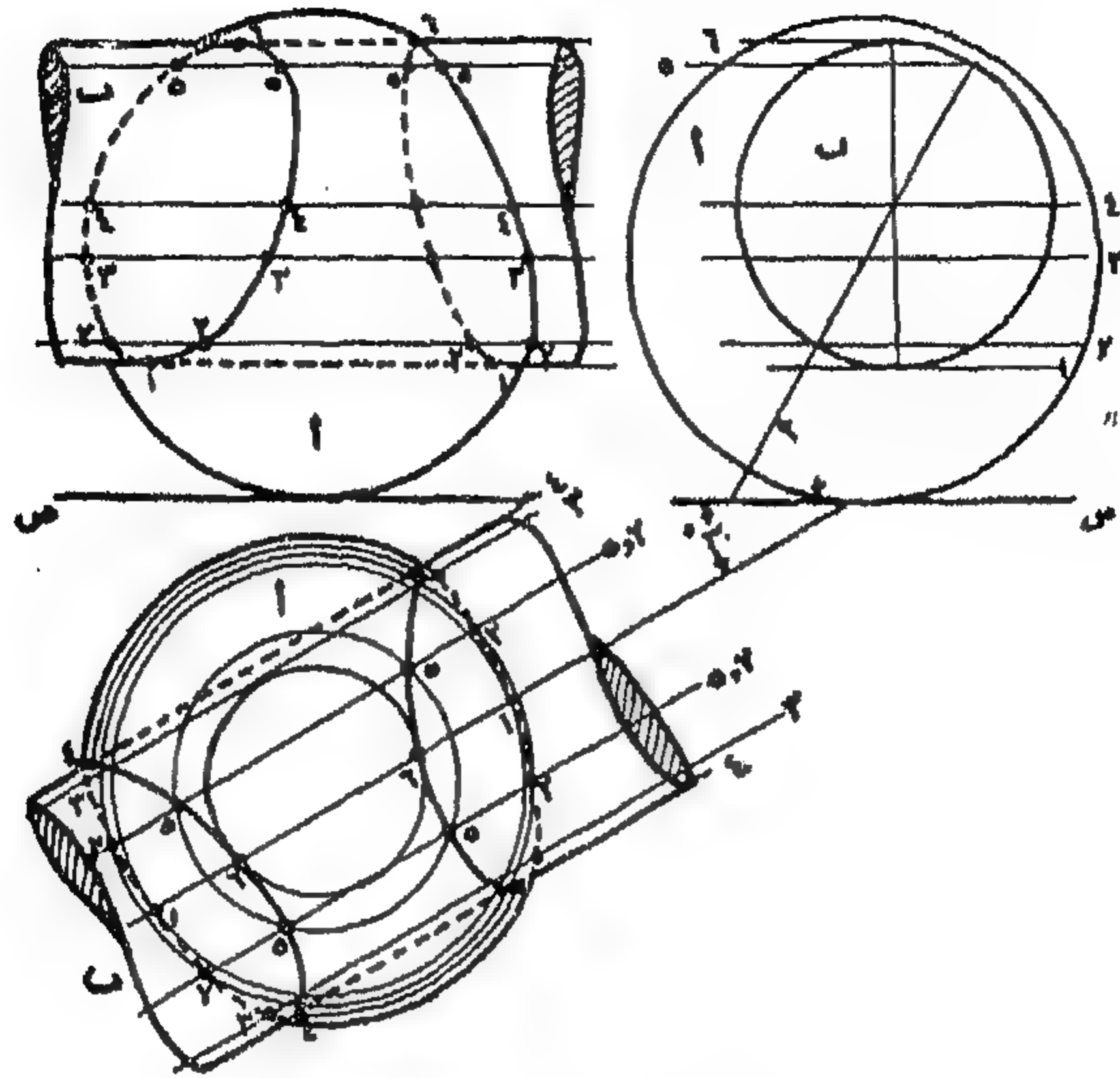


شكل (٢٩١)

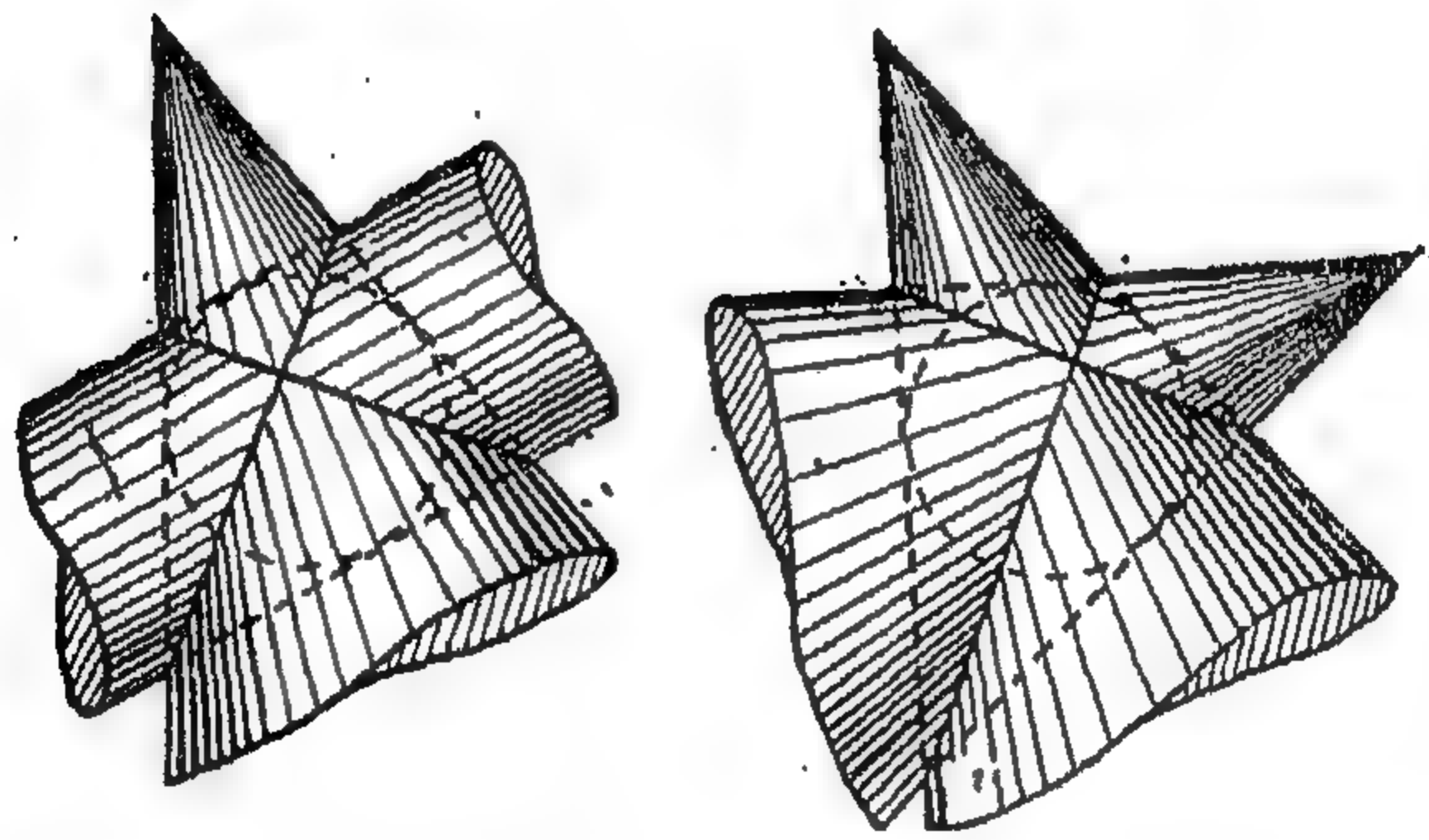
الاسطوانة لا يتقابل مع محور المخروط وقد استعملت نفس الطرق السابقة فقط أن مسقط قطاع المستوى القاطع مع المخروط يتكون من عدة دوائر مختلف اقطارها باختلاف موضع المستوى بالنسبة لمحور الاسطوانة وليس المقطع دائرة واحدة كما كان في الحالات السابقة

وشكل (٢٩٢) يبين تقاطع اسطوانة بكرة مختلفين في القطر ولا يمر محور الاسطوانة بمركز الكرة بنفس الطريقة ويلاحظ هنا أيضا أن المستوى القاطع يقطع الكرة في عدة دوائر مختلفة الاقطار

وكذلك يمكن إيجاد تقاطع مخروط بآخر كما هو واضح بالرسم (٢٩٣)



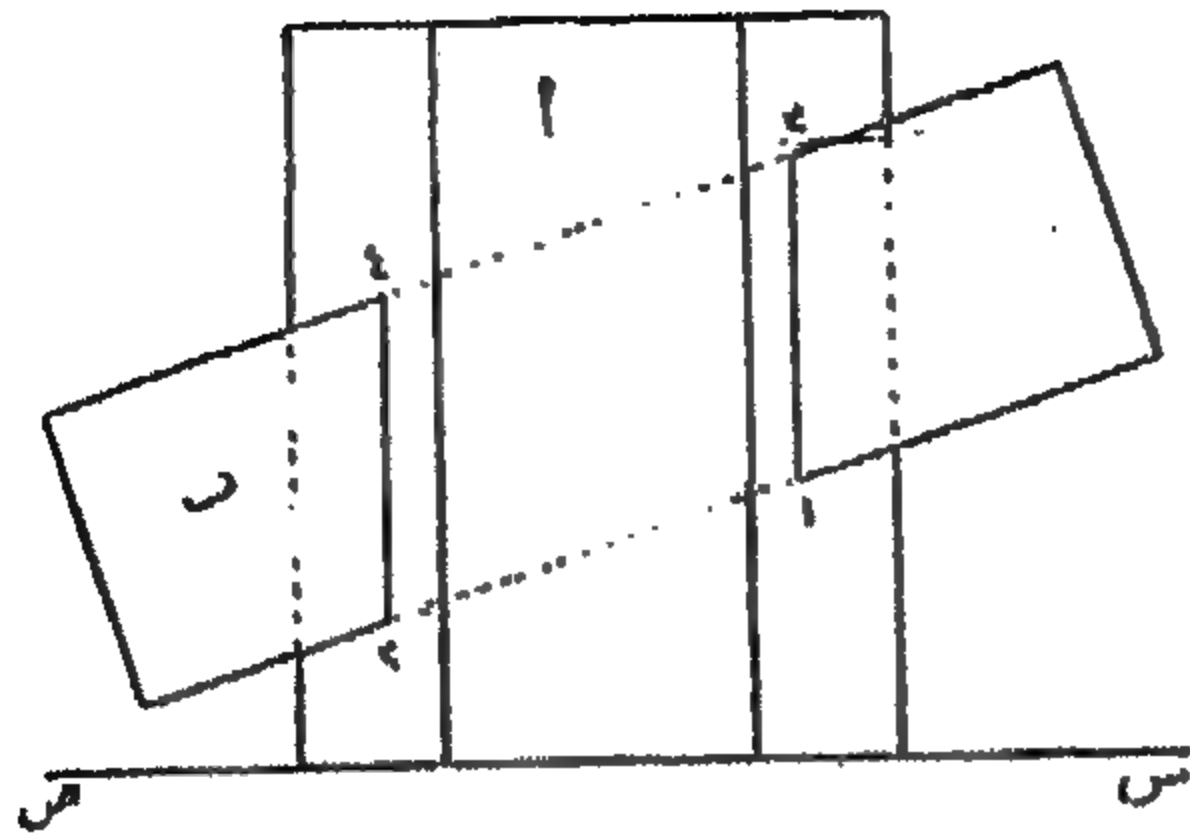
شكل (٢٩٢)



شكل (٢٩٣)

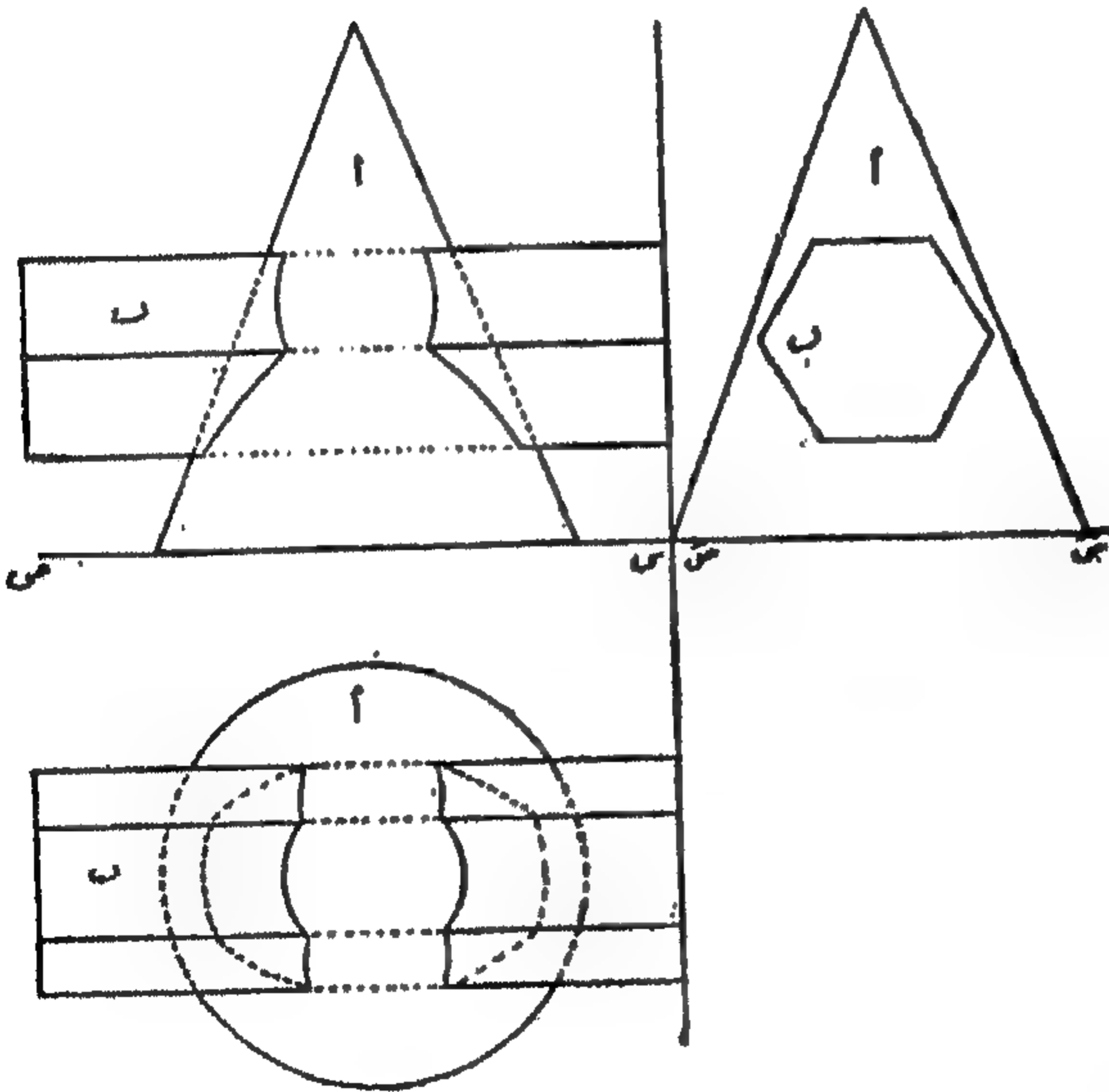
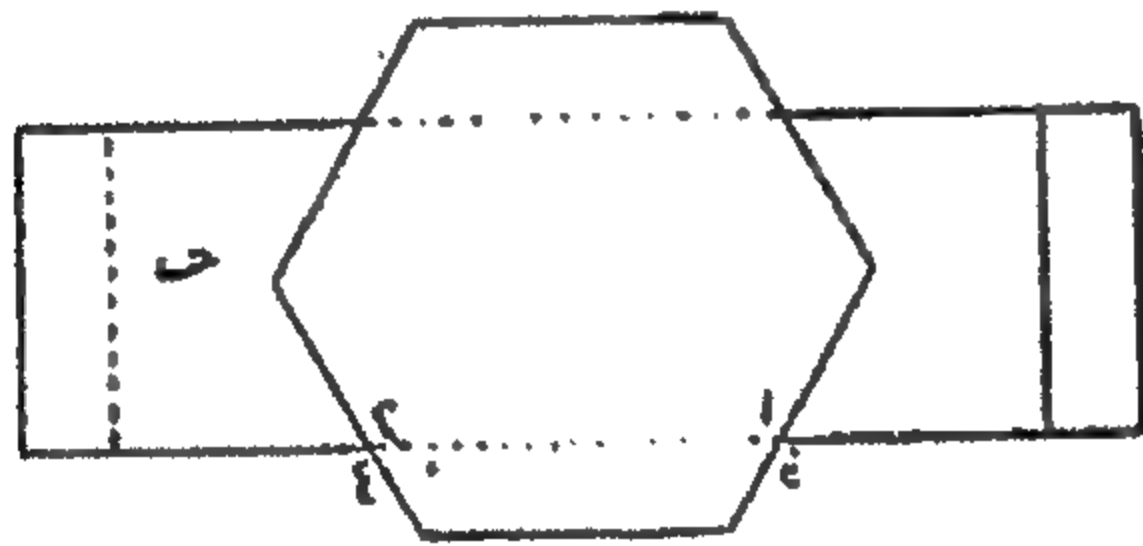
وشكل (٢٩٤) يبين تقاطع منشور رباعي مع آخر سداسي  
 وشكل (٢٩٥) يبين تقاطع منشور سداسي منتظم بمخروط قائم وهناك حالات  
 أخرى لا يمكن حصرها ويمكن بواسطة الطريقة المشروحة في أول الفصل إيجاد  
 تقاطع أي سطحين بوجه عام.





شكل (٢٩٤)

تقاطع منشور رباعي  
بآخر سداسي



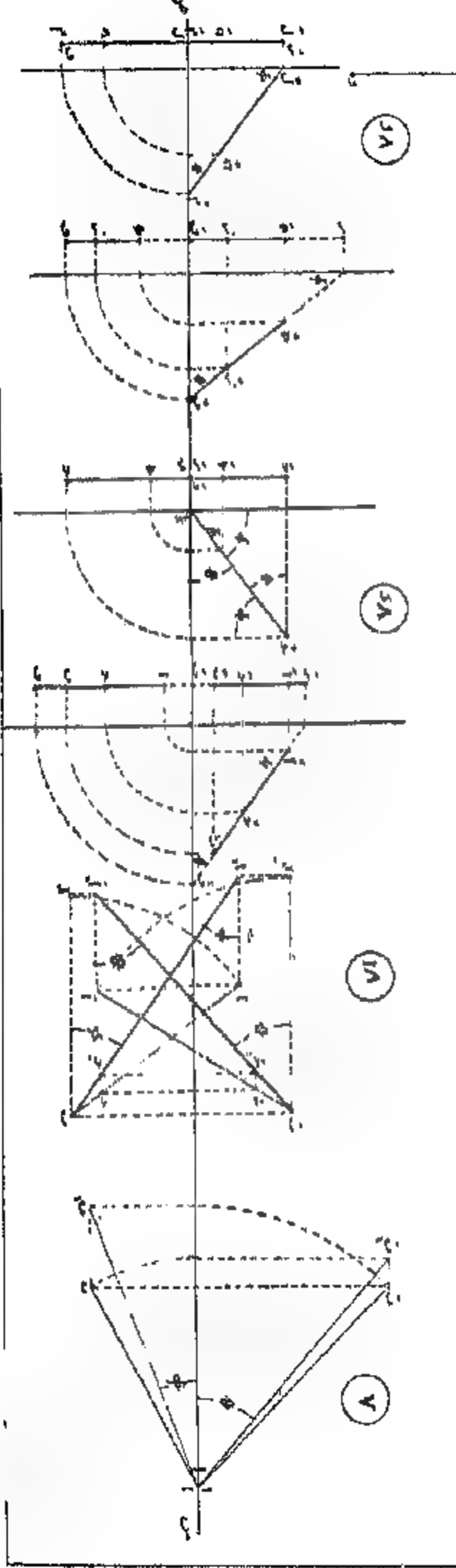
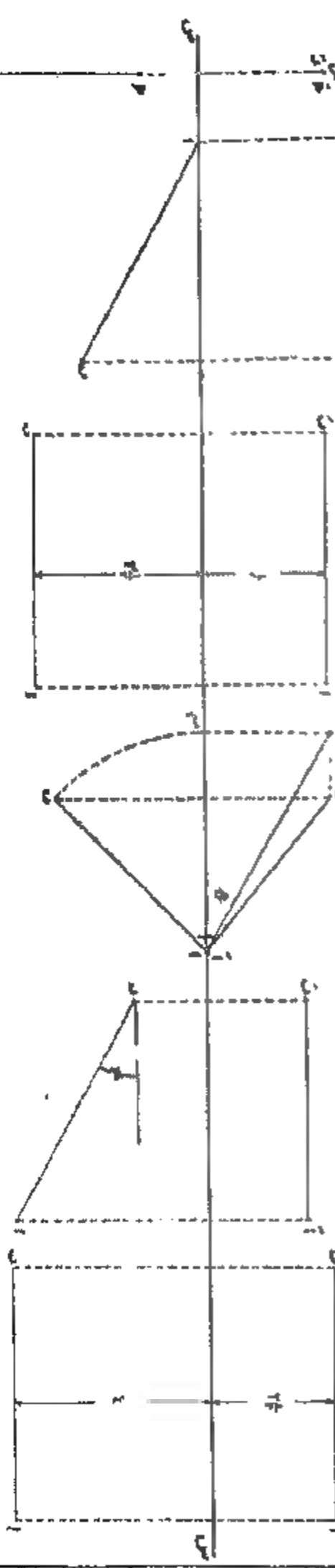
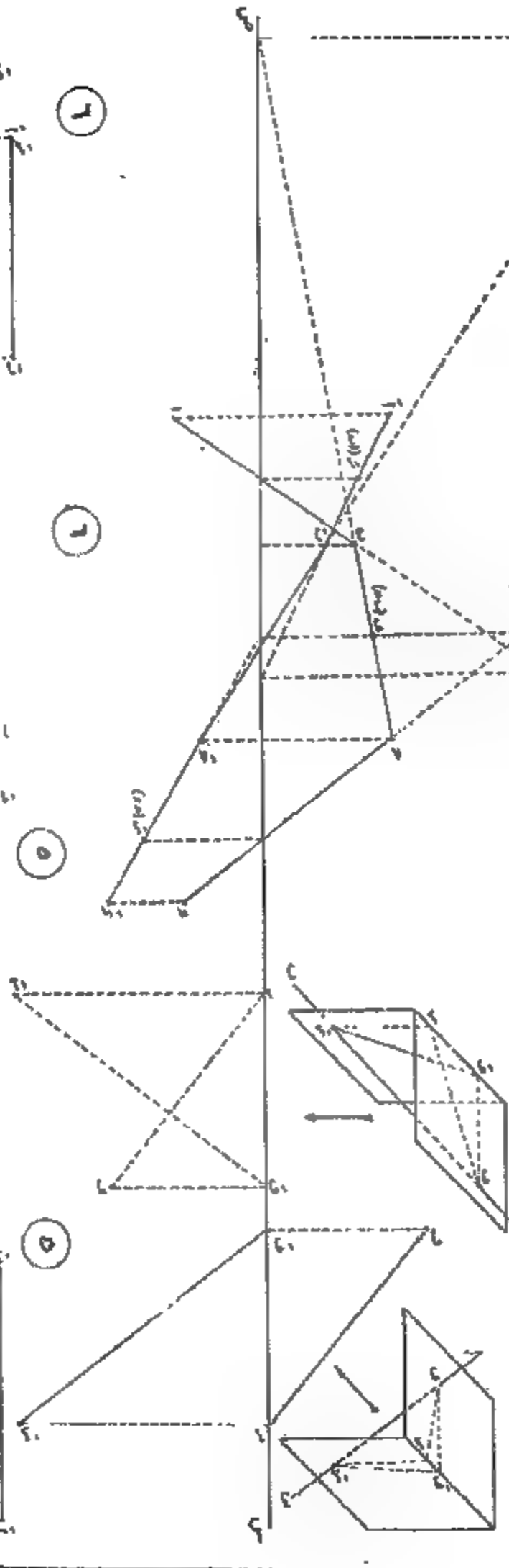
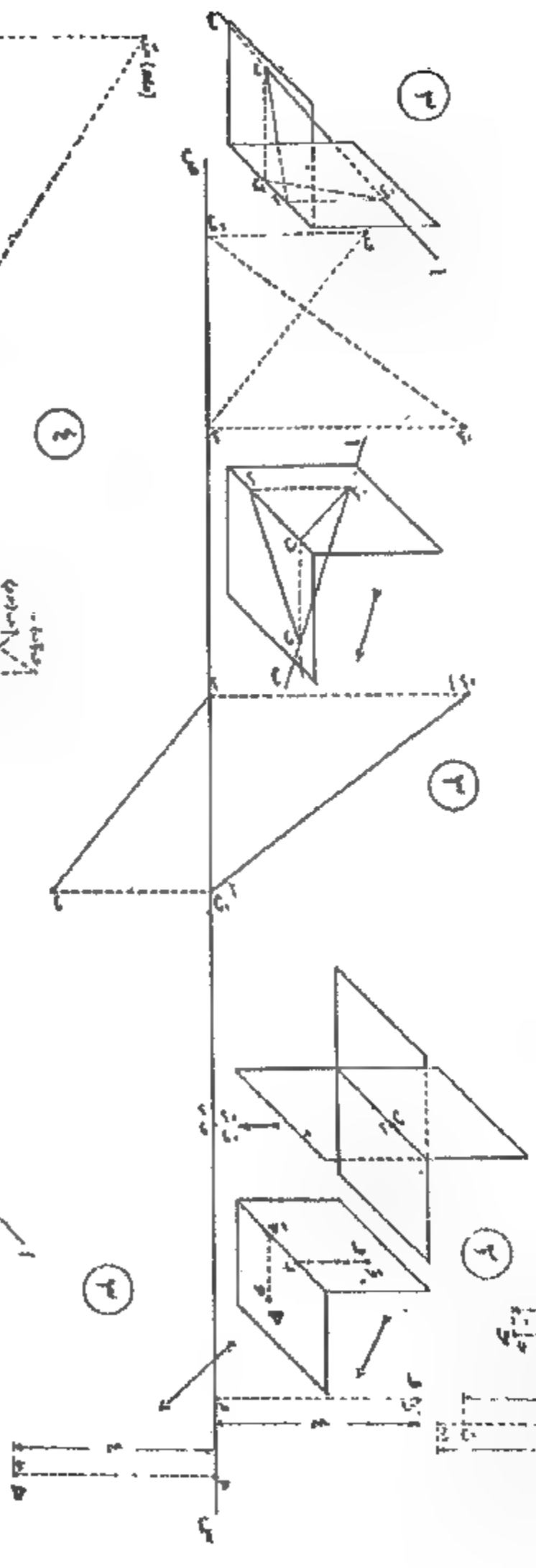
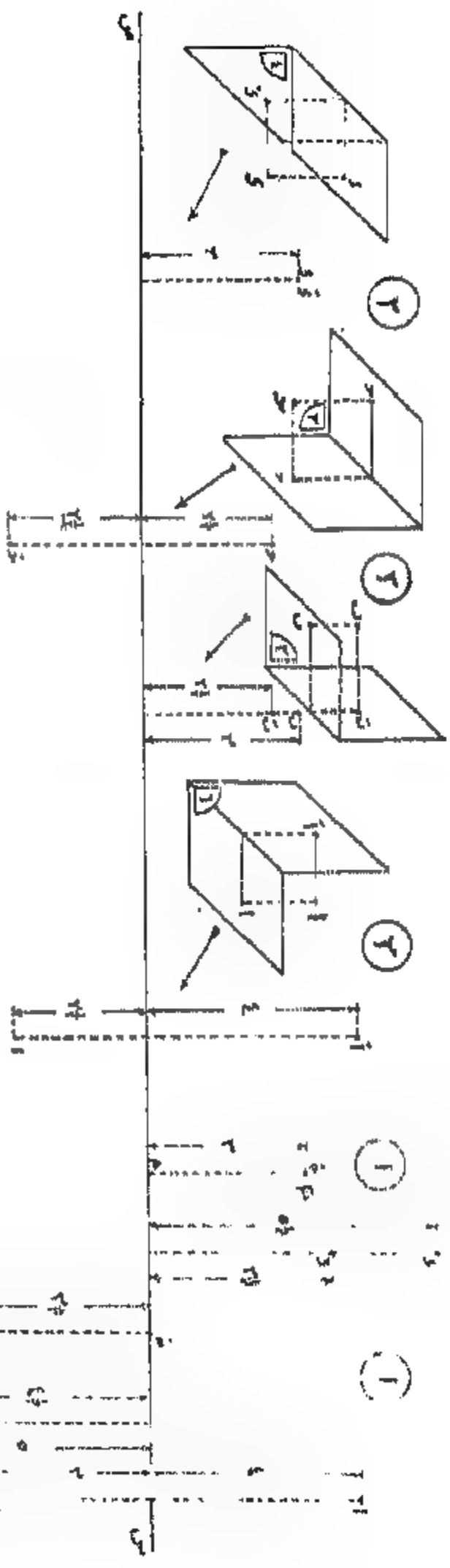
شكل (٢٩٥)

تقاطع منشور سداسي  
منتظم بخروط قائم

ويلى ذلك لوح التمرينات المحلولة

# نمونه‌ات (۱)

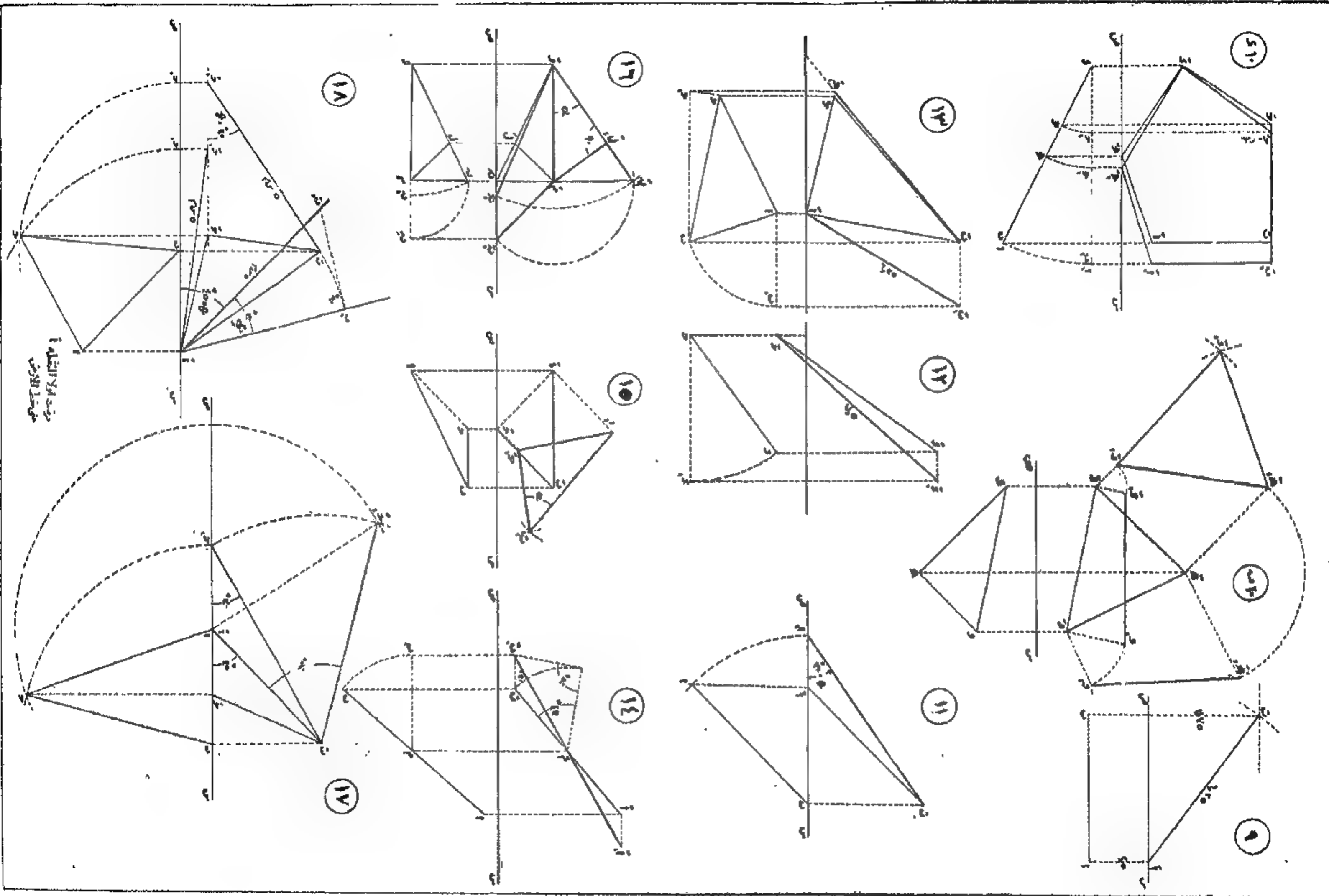
لیحه-۱





# عزيمات (1)

لوحه ٢



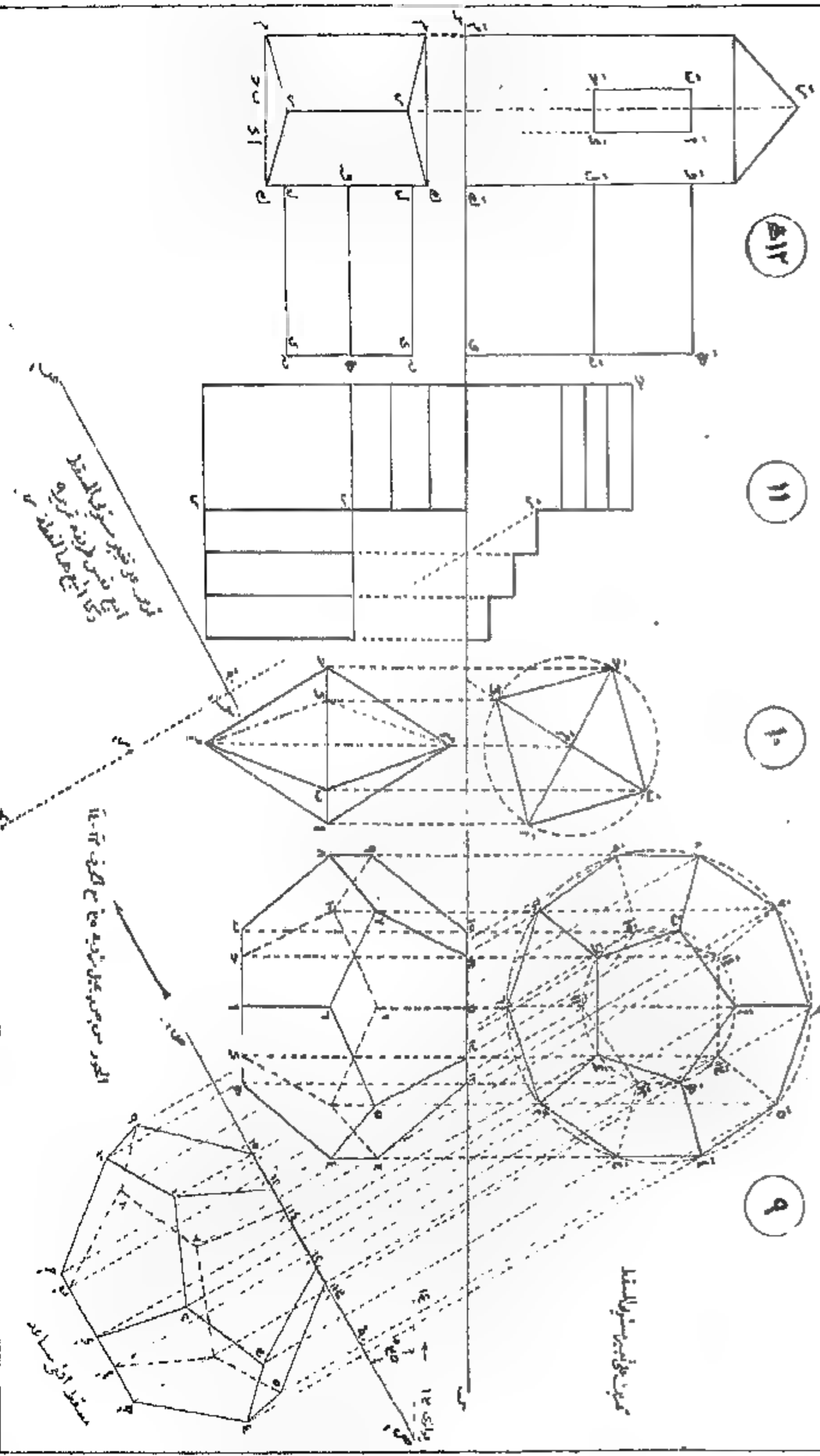
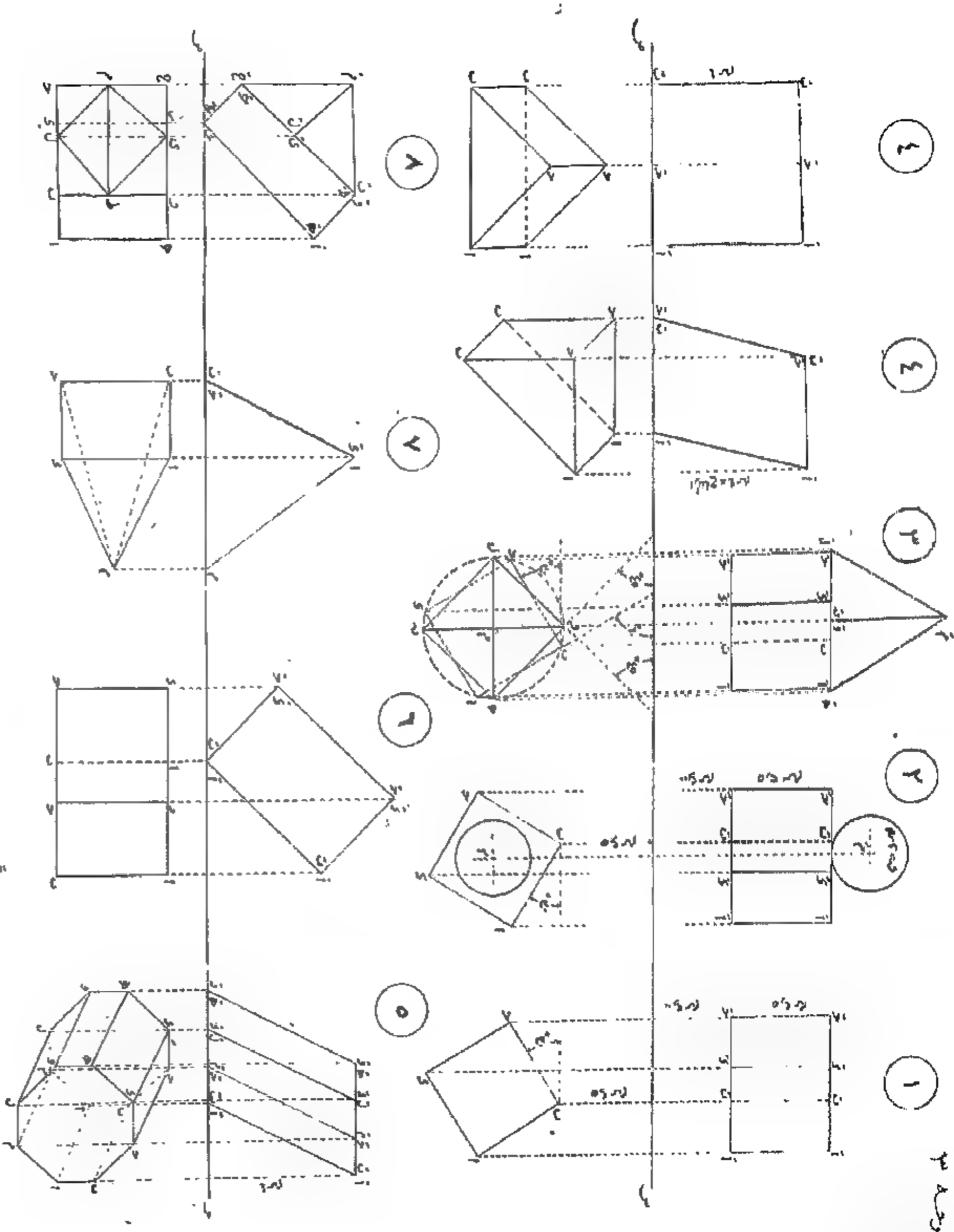
مركز الارتفاع  
محيط الارض





# تقرینات (۲)

کوسه ۳



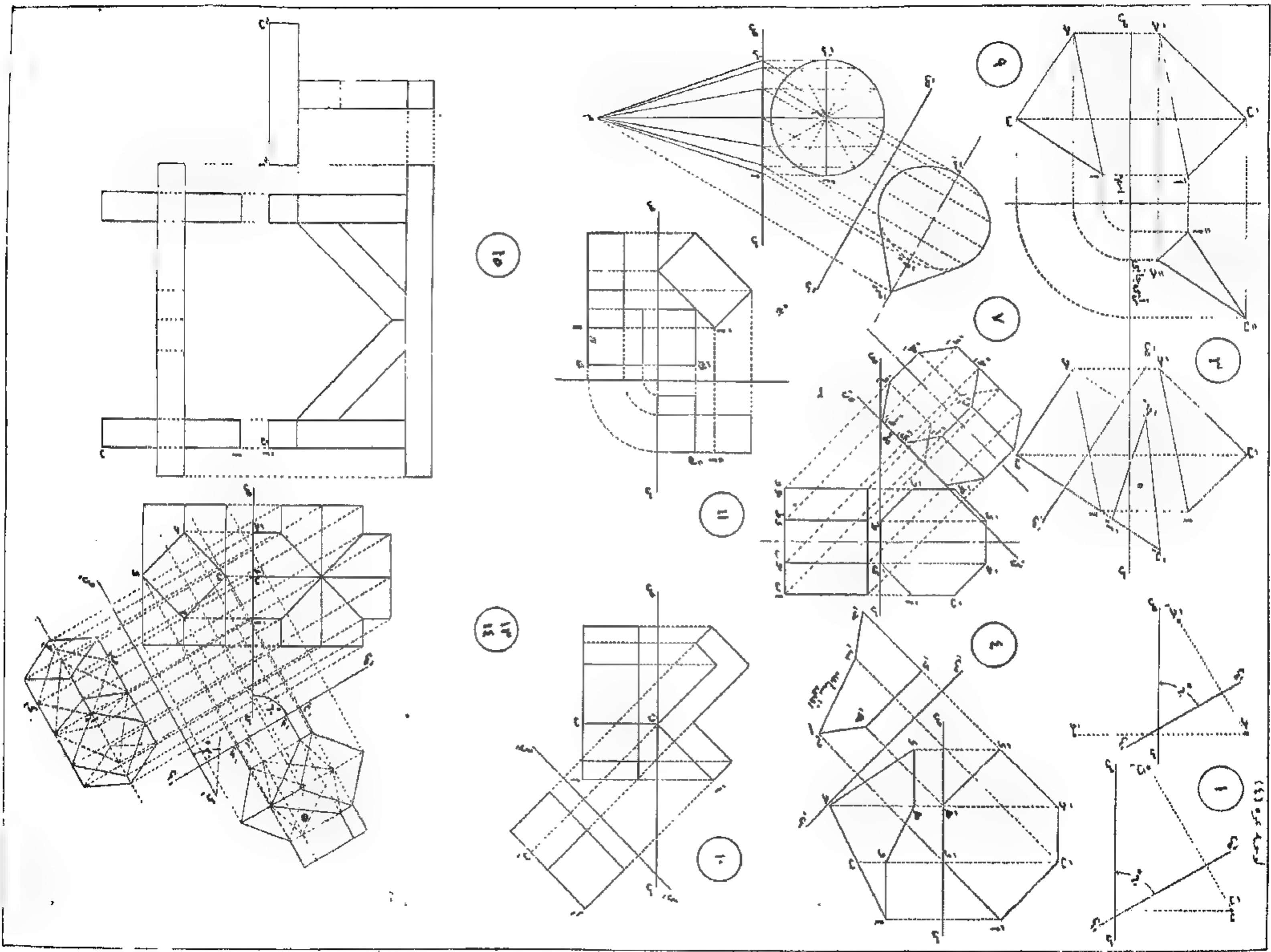
مکعب بر روی صفحه افقی

الکبر بر روی صفحه عمودی

مستطیل افقی



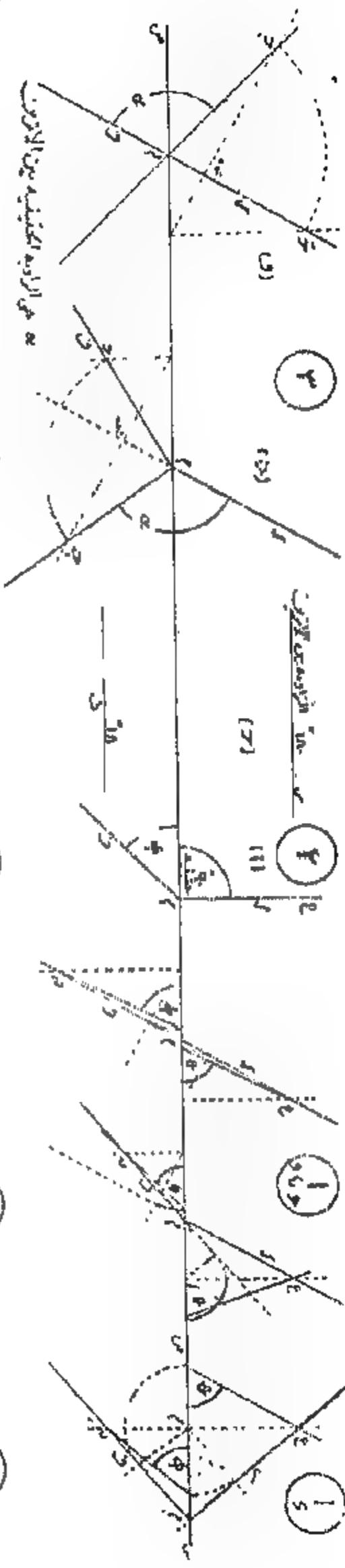
# تمرینات (۳)





# تمرینات ( ۴ )

نموده شده است



۱۰

۹

۷

۶

۳

۱۴

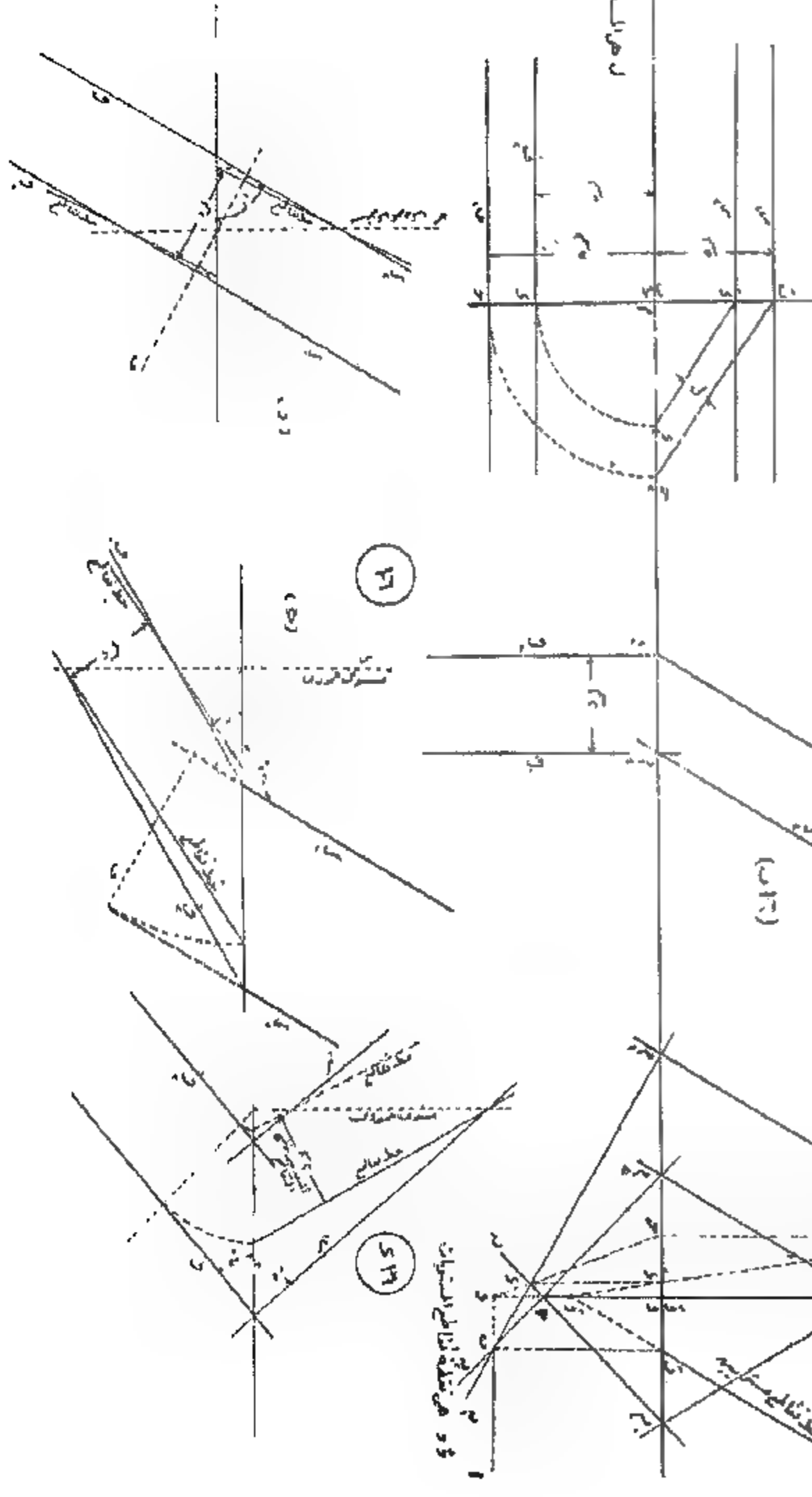
۱۲

۱۱

۱۵

۱۳

در هر یک از این موارد



و در هر یک از این موارد







ESEN-CPS-BK-0000000700-ESE

**00437890**





